

Commande des systèmes linéaires à plusieurs entrées.

F. Rotella

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

rotella@enit.fr

Table des matières

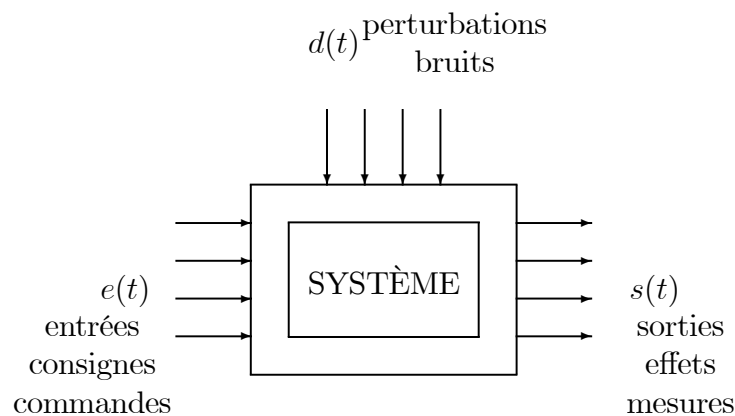
1	Introduction	3
2	Modélisation	4
2.1	Linéarisation	4
2.1.1	Autour d'un point de fonctionnement	5
2.1.2	Le long d'une trajectoire	7
2.2	Modèles linéaires : notion d'opérateur de transfert	7
3	Modèles	8
3.1	La forme différentielle entrée-sortie	8
3.2	La matrice transfert	9
3.3	L'équation d'état	10
3.4	Modèles bloqués-échantillonnés des systèmes linéaires	11
4	Passage entre modèles	12
4.1	Réalisation	12
4.1.1	L_α inversible	12
4.1.2	L_α non inversible	14
4.2	Factorisation de la matrice transfert	16
5	Commande par retour d'état	17
5.1	Structure d'un système	19
5.2	Placement de pôles	21
5.3	Placement de structure	23
6	Autre forme de placement de pôles	24
6.1	Par platitude	25
6.2	Par commande LQ	26
7	Retour de sortie	26
A	Exemples de modèles de systèmes	27
A.1	Modèle d'un sous-marin	27
A.1.1	Modélisations du comportement	27
A.1.2	Modèle d'état	28
A.1.3	Modèle transfert	28

A.2	Avion	29
A.3	Turbo-générateur	29
A.4	Véhicule télécommandé	30
B	Forme de Smith des matrices	30
B.1	Cas des matrices constantes	30
B.2	Cas des matrices polynomiales	31
C	Formes canoniques d'une équation d'état	33
C.1	Forme canonique commandable	33
C.2	Forme canonique observable	36
D	Forme de Jordan d'une matrice	37
E	Cas des systèmes mono-entrée	38
E.1	Forme canonique mono-entrée	39
E.2	Formule de Bass et Gura	40
E.3	Formule de Ackermann	41
E.4	Formule de Mayne-Murdoch	41
E.5	Application aux gains dyadiques	42
F	Décomposition en valeurs singulières	42
F.1	Décomposition	42
F.2	Valeurs singulières extrêmes	44
F.3	Application à la résolution d'un système linéaire	44
F.4	Conditionnement d'une matrice	45
	Références	46

1 Introduction

Lorsque l'on envisage la commande d'un système, la première étape consiste à le modéliser. Modéliser un système cela peut consister à, d'une part, élaborer un objet mathématique qui permette de *décrire* et *prédire* le comportement dynamique du système lorsque ce dernier est soumis à des influences externes. Ou bien, d'autre part, cela peut consister à élaborer un objet mathématique qui permette d'appliquer des méthodes pour *améliorer* son comportement dynamique. On doit donc ici distinguer la modélisation pour l'analyse, qui demande la construction de modèles précis et souvent complexes, et la modélisation pour la synthèse qui va demander des modèles exploitables par des méthodes disponibles. De façon générale, ces deux points de vue ne conduisent pas forcément au même objet mathématique et comme c'est le deuxième point de vue que l'on va privilégier ici et que l'on possède un arsenal de techniques et de méthodes basé sur le formalisme matriciel, on focalisera la modélisation sur les modèles linéaires à coefficients constants. Avant de poursuivre arrêtons-nous sur les deux termes importants que nous avons utilisés de façon intuitive :

Systeme : un système est un ensemble de pièces, d'objets ou d'entités qui réalise une opération spécifique. Il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitations extérieures :



Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

Comportement dynamique : c'est le comportement des variables de sortie du système au cours du temps relativement à l'évolution des variables d'entrées. Ce comportement est à distinguer du comportement statique où les variables de sorties reproduisent, à un gain près, le comportement des variables d'entrée.

Le comportement dynamique met en évidence le fonctionnement temporel du système ainsi que la transformation d'information impliquée par son action.

Suivant ce que l'on connaît du système, on peut construire deux types de modèles : un modèle de connaissance où apparaissent les équations de fonctionnement du système ainsi que des variables internes ; un modèle de comportement qui établit des relations entre les entrées et les sorties du système à partir d'expériences et du comportement observé du système en réponse à des entrées fixées ou tout au moins connues. Alors que l'obtention du premier type de modèle relève plutôt de la modélisation, l'obtention du deuxième type fait appel à l'identification d'un système et dans chacun des cas nous ne nous poserons pas la question de savoir si les paramètres des modèles sont connus, nous le supposerons toujours implicitement. Dans tous les cas, lorsque des paramètres d'un modèle sont inconnus, il y a lieu de procéder à une identification paramétrique [32], et ceci sur l'un

ou l'autre des types de modèles. On voit donc que la différence entre modèles de connaissance et de comportement est souvent ténue et qu'il s'agit essentiellement d'obtenir un modèle mathématique permettant de simuler et d'analyser un système existant ou à créer. En ce qui nous concerne ici, la classe de modèles qui nous permettra de concevoir une commande adéquate est celle des modèles linéaires et dans un premier temps nous verrons comment, à partir des équations de fonctionnement du système, on peut les obtenir.

Nous verrons ensuite qu'il existe trois représentations possibles pour un système linéaire parmi lesquelles nous utiliserons plus particulièrement la représentation d'état. Comme cette représentation n'est pas souvent celle obtenue immédiatement, il sera nécessaire d'étudier les méthodes qui permettent de passer de l'une à l'autre.

La commande que nous allons détailler ici sera basée sur la notion de retour d'état et aura pour principal objectif de déplacer la structure du système, cette structure étant composée des vecteurs propres et valeurs propres associés à la représentation d'état. Le placement des valeurs propres permet de régler les pôles ou dynamiques du système bouclé, donc permet d'en régler la stabilité ou la rapidité. Contrairement au cas des systèmes mono-entrée, nous allons voir qu'il existe, dans le cas des systèmes multi-entrée, des paramètres de réglage inutilisés. Ceux-ci peuvent être utilisés pour agir sur les vecteurs propres dont nous verrons l'intérêt plus loin. Nous verrons également dans quelle conditions un retour de sortie sera envisageable.

2 Modélisation

L'utilisation des lois de la physique qui régissent ou décrivent le comportement d'un système ont l'inconvénient d'être non linéaires. Il suffit par exemple de songer au phénomène de saturation présent dans tout actionneur ou capteur. Rappelons qu'un fonctionnement est non linéaire lorsque la multiplication de l'entrée par une constante arbitraire ne conduit pas à une évolution de la sortie dans la même proportion et qu'une fonction $f(x)$ est linéaire lorsqu'elle s'écrit $f(x) = Ax$, où A est une matrice constante. Bien qu'il existe des méthodes de synthèse propres aux systèmes non linéaires [14], celles-ci sont lourdes à mettre en œuvre, sont bien souvent des extensions des méthodes développées dans le cas des systèmes linéaires et se pose le difficile problème de l'observation des variables internes. C'est la raison pour laquelle ce que nous allons développer ici le sera dans le cadre des systèmes linéaires et bien sûr la première étape va donc être l'obtention d'un modèle linéaire à partir des équations de fonctionnement du système.

2.1 Linéarisation

Considérons un processus décrit par les équations non linéaires :

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{x}(t), x(t), u(t)) &= 0, \\ \Psi(y(t), x(t), u(t)) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

où $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ représentent respectivement les variables d'entrée, de sortie et les variables internes du processus. Linéariser ce système consiste à en chercher un modèle qui localement vérifie la propriété de linéarité :

$$\begin{aligned}\text{si } u_1(t) \text{ donne } y_1(t) \text{ et } u_2(t) \text{ donne } y_2(t) \\ \text{alors} \\ \text{si } \lambda u_1(t) + \mu u_2(t) \text{ donne } \lambda y_1(t) + \mu y_2(t).\end{aligned}$$

Pour y parvenir, nous allons considérer le système autour d'un équilibre, qui peut être constant ou pas. Dans le premier cas il s'agira d'un point de fonctionnement et dans le deuxième, nous

envisagerons une trajectoire. Mais ce qui est important, c'est que nous allons considérer des variations autour de cet équilibre. Le modèle linéaire obtenu ne sera donc pas entre les variables initiales mais entre les écarts de ces variables.

2.1.1 Autour d'un point de fonctionnement

Soit $y = f(x, z)$ une fonction non linéaire algébrique alors autour du point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) défini par :

$$y_e = f(x_e, z_e)$$

on a la série de Taylor :

$$y = f(x_e, z_e) + \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \right]_{x_e, z_e} (x - x_e) + \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \right]_{x_e, z_e} (z - z_e) + \dots$$

Tronquée après les termes du premier ordre, on a entre les variables d'écart :

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x_e, \\ \delta y &= y - y_e, \\ \delta z &= z - z_e, \end{aligned}$$

la loi linéarisée :

$$\delta y = \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \right]_{x_e, z_e} \delta x + \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \right]_{x_e, z_e} \delta z.$$

Nous allons appliquer ce principe sur le système (1), pour lequel un point d'équilibre constant $E = (y_e, x_e, u_e)$ est défini par $\dot{x}_e = 0$ et :

$$\begin{aligned} \Phi(0, x_e, u_e) &= 0, \\ \Psi(y_e, x_e, u_e) &= 0. \end{aligned}$$

L'utilisation de variables d'écart :

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x_e, \\ \delta y &= y - y_e, \\ \delta u &= u - u_e, \end{aligned}$$

et un développement limité au premier ordre de (1) donne :

$$\begin{aligned} \underbrace{\Phi(\dot{x}(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Phi(0, x_e, u_e)}_0 + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E \delta \dot{x}(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_E \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_E \delta u(t), \\ \underbrace{\Psi(y(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Psi(y_e, x_e, u_e)}_0 + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E \delta y(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_E \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_E \delta u(t). \end{aligned}$$

Comme $\delta \dot{x}(t) = \frac{d\delta x(t)}{dt}$, lorsque $\left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E$ et $\left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E$ sont régulières, on obtient l'équation linéarisée autour du point de fonctionnement :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t), \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t). \end{aligned}$$

avec :

$$A = - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_E, B = - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_E,$$

$$C = - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_E, D = - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_E^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_E.$$

Cette relation est appelée équation d'état car elle ne fait apparaître que des dérivées d'ordre 1.

A titre d'exemple considérons le pendule simple de moment d'inertie I , de masse M et de longueur L . La modélisation et la linéarisation passe par les étapes suivantes :

1. Définition du système : l'entrée est le couple sur l'articulation Γ et la sortie l'angle par rapport à la verticale θ .
2. Loi de fonctionnement : $I\ddot{\theta} + MgL \sin \theta = \Gamma$.
3. Position d'équilibre statique : (θ_e, Γ_e) défini par $MgL \sin \theta_e = \Gamma_e$.
4. Variables d'écart : $\delta\Gamma = \Gamma - \Gamma_e$, $\delta\theta = \theta - \theta_e$.
5. Série de Taylor tronquée au premier ordre : $\sin \theta = \sin \theta_e + (\cos \theta_e)\delta\theta$.
6. Comme $\dot{\theta}_e = \ddot{\theta}_e = 0$, on a $\delta\dot{\theta} = (\dot{\delta\theta})$ et $\delta\ddot{\theta} = (\ddot{\delta\theta})$.
7. Système linéarisé :

$$I(\delta\ddot{\theta}) + MgL(\cos \theta_e)\delta\theta = \delta\Gamma$$

ayant comme entrée $\delta\Gamma$ et comme sortie $\delta\theta$ qui sont des variations autour du point de fonctionnement.

Pour préparer ce qui va suivre, on peut envisager deux types de modèles linéaires à partir d'ici :

- par introduction d'un codage de l'opérateur de dérivation, $p \triangleq \frac{d}{dt}$, ce qui donne :

$$[Ip^2 + MgL(\cos \theta_e)] \delta\theta = \delta\Gamma$$

et conduit à un modèle linéaire qui explique l'évolution de $\delta\theta$ en fonction de celle de $\delta\Gamma$ par $\delta\theta = F(p)\delta\Gamma$ sous la forme du transfert :

$$F(p) = \frac{1}{[Ip^2 + MgL(\cos \theta_e)]};$$

- par introduction de l'identité $\delta\ddot{\theta} = \frac{d(\delta\dot{\theta})}{dt}$, on obtient l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL(\cos \theta_e)}{I} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \quad 0] x(t),$$

où $u(t) = \delta\Gamma$, $y(t) = \delta\theta$ et $x(t) = [\delta\theta \quad \delta\dot{\theta}]$.

2.1.2 Le long d'une trajectoire

Si on considère $T_d(t) = (y_d(t), x_d(t), u_d(t))$ une trajectoire du système vérifiant les équations (1). A partir des variables d'écart :

$$\begin{aligned}\delta u(t) &= u_d(t) - u(t), \\ \delta y(t) &= y_d(t) - y(t), \\ \delta x(t) &= x_d(t) - x(t),\end{aligned}$$

un développement limité au premier ordre de (1) conduit aux équations linéarisées :

$$\begin{aligned}\underbrace{\Phi(\dot{x}(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Phi(\dot{x}_d(t), x_d(t), u_d(t))}_0 + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)} \delta \dot{x}(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)} \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)} \delta u(t), \\ \underbrace{\Psi(y(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Psi(y_d(t), x_d(t), u_d(t))}_0 + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)} \delta y(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)} \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)} \delta u(t).\end{aligned}$$

Sur tout intervalle $[t_0, t_F]$ où $\left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}$ et $\left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}$ sont régulières on obtient le modèle linéarisé sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t), \\ \delta y(t) &= C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t).\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}A(t) &= - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)}, \quad B(t) = - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)}, \\ C(t) &= - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)}, \quad D(t) = - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)}.\end{aligned}$$

On a obtenu une équation d'état linéaire, mais qui n'est pas à coefficients constants. Bien que nous ne la considérerons pas dans la suite, on peut adapter à ce type de modélisations les méthodes que nous allons détailler. Pour plus de détails on pourra se référer à [28] et dorénavant nous entendrons par systèmes linéaires les systèmes linéaires à coefficients constants.

2.2 Modèles linéaires : notion d'opérateur de transfert

Nous avons vu, en particulier sur l'exemple précédent, que la linéarisation conduisait à des équations différentielles linéaires, qui de façon générale s'écrivent :

$$\begin{aligned}s^{(n)}(t) + a_{n-1}s^{(n-1)}(t) + a_{n-2}s^{(n-2)}(t) + \dots + a_1s^{(1)}(t) + a_0s(t) = \\ b_me^{(m)}(t) + b_{m-1}e^{(m-1)}(t) + \dots + b_1e^{(1)}(t) + b_0e(t).\end{aligned}$$

L'utilisation du codage de l'opérateur de dérivation par $p \triangleq \frac{d}{dt}$:

$$px(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = x^{(1)}(t),$$

conduit à la notion de transfert traduisant l'équation différentielle. Soit :

$$\left[p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0 \right] s(t) = \left[b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0 \right] e(t),$$

ce qui donne le transfert représentant le système linéarisé :

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0},$$

et l'on pourra écrire :

$$s(t) = F(p)e(t).$$

Cette écriture, qui permet une manipulation simple des transferts, sera généralisée dans le cas multi-entrées multi-sorties par la notion de matrice de transfert. Mais ce qu'il ne faudra pas perdre de vue c'est qu'associé à tout opérateur de transfert existe un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

3 Modèles

Dans le cadre des modèles linéaires nous allons rencontrer essentiellement 3 types de modèles : la forme différentielle entrée-sortie, la matrice transfert et l'équation d'état. Après avoir rapidement rappelé leurs caractéristiques nous regarderons comment passer de l'un à l'autre.

3.1 La forme différentielle entrée-sortie

Lorsque l'on écrit les équations de fonctionnement du système on obtient un ensemble de relations algébriques et différentielles qui relient les variables d'entrées, regroupées dans le vecteur $u(t)$ de dimension m , les variables de sorties, regroupées dans le vecteur $y(t)$ de dimension l , et des variables internes.

Après élimination des variables internes, ce qui peut se faire par l'utilisation de la méthode des graphes de fluence, on obtient des relations algébriques et différentielles qui lient les sorties aux entrées. Sous une forme matricielle, cela se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} L_\alpha y^{(\alpha)}(t) + L_{\alpha-1} y^{(\alpha-1)}(t) + \dots + L_1 y^{(1)}(t) + L_0 y(t) = \\ M_\beta u^{(\beta)}(t) + M_{\beta-1} u^{(\beta-1)}(t) + \dots + M_1 u^{(1)}(t) + M_0 u(t). \end{aligned}$$

Dans cette relation, les matrices L_i et M_j sont des matrices constantes de tailles adaptées aux dimensions de $y(t)$ et $u(t)$, c'est-à-dire avec respectivement l et m colonnes. En considérant p , l'opérateur de dérivation, la forme différentielle peut s'écrire :

$$L(p)y(t) = M(p)u(t), \tag{2}$$

où $L(p)$ et $M(p)$ sont deux matrices polynomiales définies par :

$$\begin{aligned} L(p) &= L_\alpha p^\alpha + L_{\alpha-1} p^{\alpha-1} + \dots + L_1 p + L_0, \\ M(p) &= M_\beta p^\beta + M_{\beta-1} p^{\beta-1} + \dots + M_1 p + M_0. \end{aligned}$$

On s'aperçoit ici que la forme différentielle entrée-sortie est le modèle ARX ou modèle de prédiction donné par les méthodes d'identification. Lorsque l'on intègre un bruit de modélisation on obtient un modèle ARMAX.

En ce qui concerne le nombre de lignes, il faut qu'il soit égal au nombre de sorties, sinon une des sorties dépend des autres. En effet, soit k le nombre de lignes dans la relation (2), alors en prenant la forme de Smith de $L(p)$ (*cf.* annexe B) :

$$L(p) = W(p)S(p)V(p),$$

où $S(p) = \text{diag} \{s_1(p), \dots, s_r(p), 0, \dots, 0\}$ est une matrice $(k \times l)$ avec $r = \text{rang } L(p)$ et $U(p)$ et $W(p)$ sont deux matrices inversibles. En posant $Y(t) = V(p)y(t)$ et $U(t) = W^{-1}(p)M(p)u(t)$, on est donc ramené à :

$$\text{diag}\{s_1(p), \dots, s_r(p), 0, \dots, 0\}Y(t) = U(t),$$

qui indique qu'il n'y a que r sorties complètement indépendantes. De plus, pour éviter des contraintes de dépendance entre les entrées il est nécessaire que les $k-r$ dernières lignes de la matrice $W^{-1}(p)M(p)$ soient nulles. En résumé, on a obtenu un système multi-entrées multi-sorties à r entrées et r sorties. Ainsi de façon à éviter le cas des systèmes suractionnés ($m > l$) ou sous actionnés ($m < l$), nous prendrons toujours $l = m$ et les matrices L_i et M_j seront donc de taille $(m \times m)$.

3.2 La matrice transfert

Dans le cadre des systèmes linéaires, l'utilisation de la propriété de superposition permet de généraliser la notion de transfert définie pour des systèmes mono-entrée mono-sortie au cas des systèmes multi-entrées multi-sorties. Si on considère la relation entre l'entrée j et la sortie i sous la forme d'un transfert :

$$y_i(t) = \frac{N_{ij}(p)}{D_{ij}(p)}u_j(t), \quad (3)$$

alors par superposition, on obtient :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m \frac{N_{ij}(p)}{D_{ij}(p)}u_j(t).$$

La relation entre $u(t)$ et $y(t)$ sera donnée à l'aide de la matrice transfert $F(p)$ sous la forme :

$$y(t) = F(p)u(t), \quad (4)$$

où $F(p)$ est une matrice dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en l'opérateur p :

$$F(p) = \left[\frac{N_{ij}(p)}{D_{ij}(p)} \right].$$

Remarques :

1. En vérité, la relation (3) doit être lue $D_{ij}(p)y_i(t) = N_{ij}(p)u_j(t)$, ce qui en prenant les p.p.c.m. $\Delta_i(p)$ des polynômes $D_{ij}(p)$:

$$\Delta_i(p) = Q_{ij}(p)D_{ij}(p),$$

conduit par superposition à :

$$\Delta_i(p)y_i(t) = \sum_{j=1}^m Q_{ij}(p)N_{ij}(p)u_j(t),$$

qui conduit bien à la formule donnant la matrice transfert.

2. Il est évident que lorsque $L(p)$ est inversible dans (2), on a la relation :

$$F(p) = L^{-1}(p)M(p).$$

3. Dans le cas mono-entrée mono-sortie il n'y a pas lieu de distinguer le transfert de la forme différentielle.

3.3 L'équation d'état

L'état d'un modèle est l'ensemble des informations indépendantes nécessaire à connaître à l'instant initial pour pouvoir prédire le comportement du modèle en réponse à une entrée donnée. Construire une équation d'état d'un modèle consiste donc à proposer un modèle ne faisant intervenir que des équations différentielles d'ordre 1. Dans le cas d'un système linéaire à coefficients constants, ce sera une équation de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (5)$$

où A , B , C et D sont des matrices constantes de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(m \times n)$ et $(m \times m)$.

L'introduction de ces variables suscite deux questions relativement à chacune des relations de (5). La première concerne l'influence de la commande $u(t)$ sur l'évolution de l'état $x(t)$: est-ce que, pour tout couple $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ qui permette de passer de x_0 à x_1 ? Il s'agit du problème de la commandabilité. La deuxième question concerne la détermination de l'évolution de l'état $x(t)$ à partir de la connaissance des sorties $y(t)$: est-ce que la connaissance de $y(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ permet d'obtenir la valeur de l'état à l'instant t_0 ? Il s'agit du problème de l'observabilité.

De nombreux résultats existent pour qualifier l'une ou l'autre de ces propriétés [3], mais nous n'utiliserons, en ce qui nous concerne que le résultat suivant, appelé critère de Kalman :

- le système (5) est commandable (on dit aussi la paire (A, B) est commandable) si et seulement si :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = n;$$

- le système (5) est observable (on dit aussi la paire (A, B) est observable) si et seulement si :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n.$$

Comme on verra que ces deux propriétés sont nécessaires, que ce soit pour le placement de structure où il faudra que le système soit commandable, ou pour la construction d'observateurs [25] où il faudra que le système soit observable, il sera nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale, c'est-à-dire commandable et observable. Cette représentation peut être obtenue en éliminant les parties non commandables ou non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

Remarques :

1. Cette représentation est également valable dans le cas des systèmes dont les paramètres varient dans le temps et dans ce cas les matrices ont leurs coefficients qui dépendent explicitement du temps.
2. Cette forme permet d'unifier les systèmes mono-entrée mono-sortie et multi-entrées multi-sorties et ceci sans changer de formalisme. C'est celle que nous prendrons dans la suite.
3. Le passage de l'équation au formalisme transfert est immédiat par utilisation de l'opérateur de dérivation p :

$$F(p) = D + C(pI - A)^{-1}B.$$

4. Un changement de variables d'état, $z = Px$, où P est inversible, conduit à l'équation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A'z(t) + B'u(t), \\ y(t) &= C'z(t) + Du(t),\end{aligned}$$

où $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$ et $C' = CP^{-1}$. Si l'on calcule le transfert correspondant à cette équation, on obtient :

$$D + C'(pI - A')^{-1}B' = D + CP^{-1}(pI - PAP^{-1})^{-1}PB = F(p),$$

qui montre que le transfert est indépendant du choix des variables d'état.

3.4 Modèles bloqués-échantillonnés des systèmes linéaires

Dans le cas, situation de plus en plus fréquente, où la commande d'un système se fait par l'intermédiaire d'un calculateur, celle-ci peut être réalisée de deux façons :

1. Par discrétisation de la commande conçue pour le modèle différentiel linéaire du système. L'algorithme de commande est donc obtenu par utilisation d'approximations numériques des opérations de dérivation ou d'intégration. Parmi les plus utilisées de ces approximations, l'opérateur p peut être remplacé par :

- l'approximation d'Euler : $p \approx \frac{1 - q^{-1}}{hq^{-1}}$;
- l'approximation d'Euler rétrograde : $p \approx \frac{1 - q^{-1}}{h}$;
- l'approximation de Tustin : $p \approx \frac{2}{h} \frac{1 - q^{-1}}{1 + q^{-1}}$,

où q^{-1} représente l'opérateur de retard ($q^{-1}x_k = x_{k-1}$) et dans chaque cas le pas de calcul h doit être pris aussi petit que possible.

2. Par construction d'un modèle discret du système, le modèle bloqué-échantillonné du système, prenant en compte le fait que la commande du système est constante entre deux périodes d'échantillonnage, *i.e.* entre $[kT_e, (k+1)T_e)$ la commande vaut u_k , et le fait que la sortie soit échantillonnée, *i.e.* on ne mesure que $y_k = y(kT_e)$, où T_e est la période d'échantillonnage fixée par le concepteur. L'utilisation du formalisme d'état permet de construire facilement ce modèle bloqué-échantillonné [1]. En effet, pour un modèle linéaire¹ continu de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

on a :

$$x(t) = \exp(A(t - t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t - \tau))Bu(\tau)d\tau,$$

où $x_0 = x(t_0)$. Ainsi dans les conditions d'utilisation d'un calculateur on obtient, avec $x_k = x(kT_e)$ et $u_k = u(kT_e)$, constant sur $[kT_e, (k+1)T_e)$, le modèle bloqué-échantillonné discret sous forme d'état :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \exp(AT_e)x_k + \left[\int_0^{T_e} \exp(A\tau)d\tau \right] Bu_k, \\ y_k &= Cx_k + Du_k.\end{aligned}$$

¹Dorénavant nous ne mentionnerons plus que les variables sont des variations autour de points de fonctionnement, cela sera sous-entendu.

L'utilisation de l'opérateur d'avance q ($qx_k = x_{k+1}$) conduit directement au transfert $F(q)$ entre l'entrée u_k et la sortie y_k , $y_k = F(q)u_k$, par la formule :

$$F(q) = D + C(qI - \exp(AT_e))^{-1} \left(\int_0^{T_e} \exp(A\tau) d\tau \right) B.$$

Pour simplifier, et parce que les interprétations sont plus immédiates dans le cas continu, nous ne nous intéresserons qu'à ce cas, mais toutes les méthodes que nous allons développer dans le cas continu peuvent être utilisées ou transposées, *mutatis mutandis*, dans le formalisme des systèmes discrets ce qui conduit directement aux algorithmes de commande à mettre en œuvre sur le calculateur. Pour plus de détails sur les choix à prendre dans un tel contexte, on pourra se référer à [1].

Dans le cas des systèmes multi-entrées, une forme plus générale peut être envisagée lorsque les périodes d'échantillonnages-blocages sont différentes pour chaque canal d'entrée. Cette situation intervient par exemple lorsque des calculateurs différents doivent gérer un système complexe. Nous n'en parlerons pas ici, mais lorsque toutes les périodes d'échantillonnage sont toutes multiples entières d'une période commune T_e , le formalisme d'état permet de traiter ce mode de commande avec les mêmes méthodes que dans le cas mono-cadencé.

4 Passage entre modèles

Lorsque l'on conçoit un système de commande on peut avoir besoin d'utiliser l'un ou l'autre de ces modèles. En effet :

- à partir du système, les premiers modèles que l'on obtient sont la forme différentielle entrée-sortie ou la matrice transfert dans le cas où on procède aux identifications pour chaque paire (entrée u_j , sortie y_i);
- comme les deux grandes classes de méthodes de conception de commandes sont basées sur l'équation d'état (c'est elle que nous étudierons) ou sur la matrice transfert, il y a lieu de passer de la matrice transfert à ces deux représentations.

De façon à ne pas alourdir le nombre de parties nous regarderons dans un premier temps le passage de la matrice transfert à la forme différentielle à partir de la notion de la forme de Smith-Mc Millan. Dans un deuxième temps nous regarderons le passage de la forme différentielle à l'équation d'état. Cette dernière opération s'appelle une réalisation

4.1 Réalisation

Il s'agit de passer de la paire $(L(p), M(p))$ de la relation (2) au quadruplet de matrices (A, B, C, D) de la relation (5). Pour ce faire, nous allons distinguer 2 cas suivants que L_α est inversible ou non. Pour simplifier les expressions, quitte à rajouter des matrices nulles, nous supposons que $\beta = \alpha$.

4.1.1 L_α inversible

Première étape.

En multipliant à gauche toutes les matrices par L_α^{-1} , on transforme (2) en :

$$L'(p)y(t) = M'(p)u(t), \tag{6}$$

où, en posant $L'_i = L_\alpha^{-1}L_i$ et $M'_i = L_\alpha^{-1}M_i$:

$$\begin{aligned} L'(p) &= p^\alpha + L'_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + \dots + L'_1p + L'_0, \\ M'(p) &= M'_\alpha p^\alpha + M'_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + \dots + M'_1p + M'_0. \end{aligned}$$

Deuxième étape.

En multipliant (6) par $p^{-\alpha}$, on peut écrire :

$$y(t) = M'_\alpha u(t) + M'_{\alpha-1} p^{-1} u(t) + \dots + M'_1 p^{-\alpha+1} u(t) + M'_0 p^{-\alpha} u(t) \\ - L'_{\alpha-1} p^{-1} y(t) - \dots - L'_1 p^{-\alpha+1} y(t) - L'_0 p^{-\alpha} y(t),$$

que l'on met sous la forme :

$$y(t) = M'_\alpha u(t) + p^{-1} [M'_{\alpha-1} u(t) - L'_{\alpha-1} y(t) + p^{-1} [M'_{\alpha-1} u(t) - L'_{\alpha-1} y(t) + \\ p^{-1} [\dots + p^{-1} [M'_1 u(t) - L'_1 y(t) + p^{-1} [M'_0 u(t) - L'_0 y(t)]]]]].$$

Troisième étape.

On introduit les vecteurs $x_1(t), \dots, x_\alpha(t)$ et on décompose la relation précédente sous la forme :

$$x_1(t) = p^{-1} [M'_0 u(t) - L'_0 y(t)], \\ x_2(t) = p^{-1} [M'_1 u(t) - L'_1 y(t) + x_1(t)], \\ x_3(t) = p^{-1} [M'_2 u(t) - L'_2 y(t) + x_2(t)], \\ \vdots \\ x_{\alpha-1}(t) = p^{-1} [M'_{\alpha-2} u(t) - L'_{\alpha-2} y(t) + x_{\alpha-2}(t)], \\ x_\alpha(t) = p^{-1} [M'_{\alpha-1} u(t) - L'_{\alpha-1} y(t) + x_{\alpha-1}(t)], \\ y(t) = M'_\alpha u(t) + x_\alpha(t).$$

Quatrième étape.

En éliminant $y(t)$ et en multipliant les premières relations par p , on obtient :

$$\dot{x}_1(t) = M''_0 u(t) - L'_0 x_\alpha(t), \\ \dot{x}_2(t) = M''_1 u(t) - L'_1 x_\alpha(t) + x_1(t), \\ \dot{x}_3(t) = M''_2 u(t) - L'_2 x_\alpha(t) + x_2(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{\alpha-1}(t) = M''_{\alpha-2} u(t) - L'_{\alpha-2} x_\alpha(t) + x_{\alpha-2}(t), \\ \dot{x}_\alpha(t) = M''_{\alpha-1} u(t) - L'_{\alpha-1} x_\alpha(t) + x_{\alpha-1}(t), \\ y(t) = M'_\alpha u(t) + x_\alpha(t),$$

où :

$$M''_i = M'_i - L'_i M'_\alpha.$$

Cinquième étape.

Pour le vecteur état :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{\alpha-1}(t) \\ x_\alpha(t) \end{bmatrix},$$

on obtient la réalisation :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -L'_0 \\ I_l & \ddots & & \vdots & -L'_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_l & 0 & -L'_{\alpha-2} \\ 0 & \cdots & 0 & I_l & -L'_{\alpha-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} M''_0 \\ M''_1 \\ \vdots \\ M''_{\alpha-2} \\ M''_{\alpha-1} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \ \cdots \ \cdots \ 0 \ I_l], \quad D = M'_\alpha. \end{aligned}$$

Remarques :

- cette réalisation n'est pas unique, mais toutes les réalisations sont reliées par similitude ;
- la dimension du vecteur d'état donne l'ordre du système. On voit que lorsque L_α est inversible, cet ordre est $n = \alpha m$.

4.1.2 L_α non inversible

Dans le cas, la procédure précédente ne peut être appliquée et nous allons voir que l'on est conduit à un système d'ordre plus petit que αl .

Première étape.

On construit la forme de Smith de la matrice L_α (cf. annexe B) :

$$L_\alpha = P \begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q,$$

où P et Q sont deux matrices constantes inversibles et $\rho = \text{rang } L_\alpha$.

Remarque : P et Q ne sont pas uniques et des méthodes de construction de cette décomposition sont la factorisation de rang maximum ou la décomposition en valeurs singulières [29].

Deuxième étape.

Soit le nouveau vecteur de sortie :

$$z(t) = Py(t),$$

alors en multipliant à droite, les matrices L_i , par Q^{-1} et, à gauche toutes les matrices par P^{-1} , on transforme (2) en :

$$L'(p)z(t) = M'(p)u(t), \quad (7)$$

où, en posant $L'_i = P^{-1}L_iQ^{-1}$ et $M'_i = P^{-1}M_i$:

$$\begin{aligned} L'(p) &= \begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p^\alpha + L'_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + \cdots + L'_1p + L'_0, \\ M'(p) &= M'_\alpha p^\alpha + M'_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + \cdots + M'_1p + M'_0. \end{aligned}$$

Troisième étape.

On décompose $z(t)$ sous la forme :

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix},$$

où $z_1(t)$ regroupe les ρ premières composantes de $z(t)$. Cela permet de décomposer (7) en deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &: L'_{11}(p)z_1(t) + L'_{12}(p)z_2(t) = M'_1(p)u(t), \\ (\Sigma_2) &: L'_{21}(p)z_1(t) + L'_{22}(p)z_2(t) = M'_2(p)u(t), \end{aligned}$$

où $L'_{12}(p)$, $L'_{21}(p)$ et $L'_{22}(p)$ sont des matrices polynomiales de degré $\alpha - 1$ et $L'_{11}(p)$ est une matrice polynomiale dont le terme de plus haut degré s'écrit $I_\rho p^\alpha$.

Quatrième étape.

En considérant $z_2(t)$ comme une entrée auxiliaire, on va réaliser, le sous-système (Σ_1) écrit sous la forme :

$$L'_{11}(p)z_1(t) = M''_1(p)U(t),$$

où :

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad M''_1(p) = \begin{bmatrix} M'_1(p) & -L'_{12}(p) \end{bmatrix}$$

En appliquant la technique décrite dans la partie précédente, on obtient l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= A_1 X_1(t) + B_1 u(t) + F_1 z_2(t), \\ z_1(t) &= C_1 X_1(t) + G_1 u(t) + H_1 z_2(t), \end{aligned} \quad (8)$$

où $\dim X_1 = \rho\alpha$.

Cinquième étape.

Le terme $L'_{21}(p)z_1(t)$ qui apparaît dans (Σ_2) est une combinaison linéaire de $z_1(t)$ et de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$. Or d'après l'étape précédente, on a :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1 X_1(t) + G_1 u(t) + H_1 z_2(t), \\ \dot{z}_1(t) &= C_1(A_1 X_1(t) + B_1 u(t) + F_1 z_2(t)) + G_1 \dot{u}(t) + H_1 \dot{z}_2(t), \\ &= C_1^1 X_1(t) + G_1^1(p)u(t) + H_1^1(p)z_2(t), \\ \ddot{z}_1(t) &= C_1^1(A_1 X_1(t) + B_1 u(t) + F_1 z_2(t)) + G_1^1(p)\dot{u}(t) + H_1^1(p)\dot{z}_2(t), \\ &= C_1^2 X_1(t) + G_1^2(p)u(t) + H_1^2(p)z_2(t), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ainsi, par itérations successives, on peut construire les expressions générales :

$$\forall i, \quad z_1^{(i)}(t) = C_1^i X_1(t) + G_1^i(p)u(t) + H_1^i(p)z_2(t),$$

où les matrices C_1^i sont des matrices constantes et les matrices $G_1^i(p)$ et $H_1^i(p)$ sont des matrices polynomiales d'ordre i . Ainsi, on peut écrire :

$$L'_{21}(p)z_1(t) = C_{12} X_1(t) + G_{12}(p)u(t) + H_{12}(p)z_2(t),$$

où C_{12} est une matrice constante et les matrices $G_{12}(p)$ et $H_{12}(p)$ sont des matrices polynomiales de degré $\alpha - 1$. En injectant cette expression dans le modèle de (Σ_2) , celui-ci s'écrit :

$$L''_{22}(p)z_2(t) = M''_2(p)u(t) - C_{12} X_1(t), \quad (9)$$

où :

$$L''_{22}(p) = L'_{22}(p) + H_{12}(p), \quad M''_2(p) = M'_2(p) - G_{12}(p).$$

Sixième étape.

Si le coefficient matriciel de degré $\alpha - 1$ de $L''_{22}(p)$ est inversible, en appliquant la technique décrite dans la partie précédente, on obtient la réalisation de (9) sous la forme de l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= A_2 X_2(t) + B_2 u(t) + F_2 X_1(t), \\ z_2(t) &= C_2 X_2(t) + G_2 u(t) + H_2 X_1(t), \end{aligned} \quad (10)$$

où $\dim X_2 = (m - \rho)(\alpha - 1)$.

Remarque : sauf dans le cas où les matrices $L''_{22}(p)$ et $M''_2(p)$ sont des matrices constantes, la matrice H_2 est nulle.

Dans le cas où le coefficient matriciel de degré $\alpha - 1$ de $L''_{22}(p)$ n'est pas inversible, on applique de nouveau la démarche dans le cas où L_α est non inversible sur (9). Cela conduit à de nouvelles décompositions, mais on est sûr que le nombre d'itérations nécessaires est fini, c'est-à-dire que le processus de réalisation se termine toujours.

Septième étape.

On suppose ici que la réalisation de (Σ_2) est (10). En la regroupant avec la réalisation (8), on obtient la réalisation définie par l'état :

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix},$$

et les matrices constantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 + F_1 H_2 & F_1 C_2 \\ F_2 & A_2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_1 + F_1 G_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ C &= Q^{-1} \begin{bmatrix} C_1 + H_1 H_2 & H_1 C_2 \\ H_2 & C_2 \end{bmatrix}, & D &= Q^{-1} \begin{bmatrix} G_1 + H_1 G_2 \\ G_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'ordre du système obtenu est alors $m(\alpha - 1) + \rho$, et, de façon à comparer avec le cas précédent, on a $m\alpha - m(\alpha - 1) - \rho = m - \rho \geq 0$.

4.2 Factorisation de la matrice transfert

Il s'agit ici de transformer une matrice transfert (4) en un modèle ARX (2). Pour réaliser cette opération, on suppose que tous les coefficients de $F(p)$ sont irréductibles et on considère le polynôme $\Delta(p)$, p.p.c.m. des dénominateurs $D_{ij}(p)$, pour écrire $F(p)$ sous la forme :

$$F(p) = \frac{1}{\Delta(p)} N(p),$$

où $N(p)$ est une matrice polynomiale. Soit la décomposition de Smith de $N(p)$ (cf. annexe B) :

$$N(p) = U(p)S(p)V(p),$$

où :

- $U(p)$ et $V(p)$ sont deux matrices $(m \times m)$ polynomiales unimodulaires, c'est-à-dire dont les déterminants sont des constantes non nulles ;
- $S(p)$, forme de Smith de $N(p)$, est une matrice $(m \times m)$ diagonale :

$$S(p) = \text{diag} \{s_1(p), s_2(p), \dots, s_r(p), 0, \dots, 0\},$$

où les $s_i(p)$ sont des polynômes et chacun de ces polynômes sont divisibles sans reste par le précédent.

Cela conduit à la forme de Smith-Mc Millan de $F(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{S(p)}{\Delta(p)} = \text{diag} \left\{ \frac{s_1(p)}{\Delta(p)}, \frac{s_2(p)}{\Delta(p)}, \dots, \frac{s_r(p)}{\Delta(p)}, 0, \dots, 0 \right\}, \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{\alpha_1(p)}{\beta_1(p)}, \frac{\alpha_2(p)}{\beta_2(p)}, \dots, \frac{\alpha_r(p)}{\beta_r(p)}, 0, \dots, 0 \right\}, \end{aligned}$$

où les fractions $\frac{\alpha_i(p)}{\beta_i(p)}$ sont irréductibles. Comme les $s_i(p)$ sont divisibles sans reste par le précédent, on a les propriétés, pour $i = 2$ à r :

- $\beta_i(p)$ divise sans reste $\beta_{i-1}(p)$;
- $\alpha_{i-1}(p)$ divise sans reste $\alpha_i(p)$;
- $\beta_1(p) = \Delta(p)$.

Remarques :

- les racines des numérateurs s'appellent les zéros de $F(p)$;
- les racines des dénominateurs s'appellent des pôles de $F(p)$.

La factorisation de $M(p)$ peut être envisagée de deux façons :

$$\begin{aligned} M(p) &= [\text{diag}\{\beta_1(p), \beta_2(p), \dots, \beta_r(p), 1, \dots, 1\}]^{-1} \text{diag}\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_r(p), 0, \dots, 0\}, \\ M(p) &= \text{diag}\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_r(p), 0, \dots, 0\} [\text{diag}\{\beta_1(p), \beta_2(p), \dots, \beta_r(p), 1, \dots, 1\}]^{-1}. \end{aligned}$$

A partir de la première factorisation, on obtient la forme différentielle entrée-sortie :

$$F(p) = D_G^{-1}(p)N_G(p),$$

où :

$$\begin{aligned} D_G(p) &= \text{diag}\{\beta_1(p), \beta_2(p), \dots, \beta_r(p), 1, \dots, 1\}U^{-1}(p), \\ N_G(p) &= \text{diag}\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_r(p), 0, \dots, 0\}V(p), \end{aligned}$$

car $U^{-1}(p)$ est une matrice polynomiale.

Remarque : lorsque l'on exploite la deuxième factorisation, on obtient :

$$F(p) = N_D(p)D_D^{-1}(p),$$

où :

$$\begin{aligned} D_D(p) &= V^{-1}(p)\text{diag}\{\beta_1(p), \beta_2(p), \dots, \beta_r(p), 1, \dots, 1\}, \\ N_D(p) &= U(p)\text{diag}\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_r(p), 0, \dots, 0\}. \end{aligned}$$

Cette forme conduit à la relation :

$$y(t) = N_D(p)D_D^{-1}(p)u(t),$$

et conduit à introduire un vecteur $\zeta(t)$, appelé état partiel, défini par :

$$\begin{aligned} D_D(p)\zeta(t) &= u(t), \\ y(t) &= N_D(p)\zeta(t). \end{aligned} \tag{11}$$

5 Commande par retour d'état

La commande par retour d'état consiste à considérer le modèle du processus sous la forme d'une équation d'état² :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{12}$$

où $u(t)$ est le vecteur de commande de dimension m , $x(t)$, le vecteur d'état, de dimension n , et $y(t)$ le vecteur de sortie de dimension m et faire un bouclage de la forme :

$$u = Fr(t) - Kx(t), \tag{13}$$

²Suivant ce que nous avons dit précédemment, nous ne considérerons que les systèmes ayant autant d'entrées que de sorties, et le cas d'un système où la sortie comporte une transmission directe, de la forme $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, sera traité en considérant la nouvelle sortie $y(t) - Du(t)$.

où F et K sont des matrices constantes de dimensions convenables et r est la consigne de référence de dimension m .

Le but de la conception d'une commande par retour d'état consiste à déterminer les matrices F et K de façon à satisfaire certaines spécifications. Nous verrons dans la suite que ces spécifications peuvent reposer sur un placement des valeurs propres en boucle fermée, ou sous une forme plus générale, sur un placement de structure. On peut également obtenir ces gains matriciels de bouclage en utilisant des principes de commande optimale. Sans détailler cette dernière méthode nous en rappellerons les résultats pour en voir l'influence sur la structure obtenue.

Toutefois ces méthodes, que nous allons voir dans les parties qui suivent, donnent la matrice K , et le gain F , qu'on pourrait appeler gain de prébouclage, est calculé *a posteriori*. En effet, pour un gain K stabilisant le système en boucle fermée, le bouclage conduit au système :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BFr(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

ce qui pour une référence constante r , conduit au gain statique :

$$C(BK - A)^{-1}BF.$$

Une façon de déterminer F consiste à imposer un gain statique *a priori*, soit Γ , ce qui donne :

$$F = [C(BK - A)^{-1}B]^{-1}\Gamma.$$

D'autre part, avant de rentrer dans le vif du sujet, mentionnons un certain nombre de points sur la commande par retour d'état.

1. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, la commande par retour d'état nécessite la connaissance de cet état. Ceci est réalisé, à partir des mesures accessibles sur les entrées et les sorties, par un observateur qui est un système dédié dont la fonction consiste à reconstruire cet état. La forme générale d'un observateur est :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Nz(t) + Hu(t) + Ey(t), \\ \hat{x}(t) &= Pz(t) + Mu(t) + Vy(t),\end{aligned}$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état reconstruit. Dans l'hypothèse de la mise en œuvre d'une commande par retour d'état, on réalise :

$$u = Fr(t) - K\hat{x}(t),$$

ce qui modifie les relations de l'observateur en :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= N'z(t) + H'r(t) + E'y(t), \\ \hat{x}(t) &= P'z(t) + M'r(t) + V'y(t),\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}P' &= (I + MK)^{-1}P, & N' &= N - HKP', \\ M' &= (I + MK)^{-1}MF, & H' &= HF - HKM', \\ V' &= (I + MK)^{-1}V, & E' &= E - HKV'.$$

Les méthodes de conception, c'est-à-dire la détermination des matrices constantes F , H , E , P , M et V , d'un observateur sont détaillées dans [25], pour un système non bruité, et dans [26], pour un système présentant des bruits sur les mesures ou sur les commandes.

2. Le retour peut avoir également comme objectif de découpler l'effet des entrées sur les sorties. Les méthodes de découplage conduisent souvent à des retours d'état dynamiques, par opposition à ceux que nous envisagerons ici tels que (13) qui sont des retours d'état statique. Les méthodes de conception des bouclages découplants, qui ont l'avantage de décomposer un système multi-entrées multi-sorties en plusieurs systèmes mono-entrée mono-sortie en parallèle, sont détaillées dans [27]. Notons que ces méthodes sont à manier avec précaution car elles peuvent, si on n'y prête pas attention, laisser une partie non observable dont il convient de vérifier la stabilité. Lorsque cette partie n'est pas stable, il y a lieu de changer, ou la structure du système ou les sorties considérées, mais, comme l'indique la commande par platitude [7], si l'équation d'état est commandable, on sait qu'il en existera toujours.
3. Nous n'envisagerons ici que les systèmes linéaires à paramètres constants, c'est-à-dire issus principalement d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement. On peut étendre, dans leur principe, les méthodes que nous allons voir au cas des systèmes à paramètres variants dans le temps mais au prix d'une augmentation de la lourdeur des traitements. Ceci est proposé dans [28], mais ne sera pas développé ici.
4. Une forme réduite de la commande statique par retour d'état, que nous étudierons dans un chapitre particulier, est la commande par retour statique de sortie de la forme :

$$u(t) = Fr(t) - Ky(t),$$

qui a l'avantage de ne pas demander d'observateur mais qui permettra de satisfaire moins de contraintes. En effet, dans le cas mono-entrée mono-sortie, K est un scalaire pour un retour de sortie, donc on ne dispose que d'un paramètre de réglage, alors que le gain d'un retour d'état est composé de n paramètres de réglage. Dans le cas où $F = K$, on obtient un retour statique d'erreur et si l'on force une action intégrale cela permet d'assurer une boucle fermée avec un gain statique unité.

5.1 Structure d'un système

La structure d'un système linéaire défini par l'équation d'état (12) repose sur l'ensemble des matrices définies par la décomposition de Jordan de la matrice A . Suivant l'annexe D, A peut être décomposée sous la forme :

$$A = P^{-1}JP, \quad (14)$$

où $J = \text{diag} \{J_1, \dots, J_p\}$, J_i est le bloc de Jordan ($n_i \times n_i$) :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

et les colonnes de P^{-1} sont constituées par les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés de A . Les λ_i et les n_i sont les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité (géométrique)³, avec bien sûr $\sum_{i=1}^p n_i = n$. L'ensemble (J, P^{-1}) constitue la structure du système. Grâce au bouclage par retour d'état, on va chercher à obtenir un système en boucle fermée ayant une structure particulière.

Comme la décomposition de Jordan peut s'écrire également $AP^{-1} = P^{-1}J$ ou $PA = JP$, les colonnes de la matrice P^{-1} sont les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés à droite et les lignes de la matrice P sont les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés à gauche.

³A ne pas confondre avec l'ordre de multiplicité algébrique donné par le polynôme caractéristique.

Plaçons-nous dans le cas où A est diagonalisable, situation simplifiée mais non restrictive car dans le cas où on pourra placer les pôles de $A - BK$, on aura intérêt à les choisir tous distincts. En effet :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \varepsilon \end{bmatrix},$$

est plus proche, lorsque ε tend vers 0, de $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, que de $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Dans ce cas, en notant $P^{-1} = D = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]$ et :

$$P = G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},$$

le changement de variables $z(t) = Gx(t)$, soit $x(t) = Dz(t)$, conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Jz(t) + GBu(t), \\ y(t) &= CDz(t). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice D indique comment les composantes de $z(t)$, qui sont parfois appelées composantes modales ou modes du système [8], se répartissent dans le vecteurs d'état $x(t)$, la matrice CD comment elles se répartissent dans la sortie $y(t)$ et la matrice GB comment les commandes se répartissent pour influencer l'évolution des composantes de $z(t)$. Si on note $GBu(t) = v(t) = [v_1(t) \ \dots \ v_n(t)]$, et $J = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a :

$$\text{pour } i = 1 \text{ à } n, \quad z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} v_i(\tau) \, d\tau.$$

En utilisant le fait que $DG = GD = I$, on en déduit que, lorsque les valeurs propres, λ_i , $i = 1$ à n , de A sont toutes distinctes ou si A est diagonalisable, on a :

$$F(p) = C(pI - A)^{-1}B = \sum_{i=1}^n \frac{(Cd_i)(g_i B)}{p - \lambda_i}.$$

Ces considérations conduisent à pouvoir imposer des contraintes structurelles que l'on peut obtenir sur le système en boucle fermée.

A titre d'exemple, l'utilisation du bouclage (13) sur le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Delta d(t),$$

où $d(t)$ est une perturbation, conduit au système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BFr(t) + \Delta d(t).$$

Soit (J, D) la structure, supposée diagonale, de $A - BK$, et le changement de variable $x(t) = Dz(t)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Jz(t) + GBFr(t) + G\Delta d(t), \\ y(t) &= CDz(t). \end{aligned}$$

En notant $e_k = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ le k -ième vecteur unité, le placement de structure permet d'imposer certaines contraintes comme par exemple :

- la k -ième sortie ne contient pas $z_i(t)$ peut se traduire par : $e_k^T C d_i = 0$;
- la k -ième perturbation n'influence pas $z_i(t)$ peut se traduire par : $g_i \Delta e_k = 0$.

De même, l'utilisation du résultat précédent permet d'envisager un découplage partiel entre des groupes d'entrées et des groupes de sorties.

Une autre application du placement de structure réside dans l'utilisation d'observateurs lorsque l'état n'est pas complètement accessible. En effet, si on considère une sortie bruitée de la forme :

$$y(t) = Cx(t) + b(t),$$

alors l'utilisation d'un observateur de la forme :

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

conduit à une erreur d'observation, $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, régie par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + \Delta d(t) - Lb(t).$$

L'utilisation de la structure (J, D) associée à la matrice $A - LC$, conduit après changement de variables, $e(t) = D\zeta(t)$, à :

$$\dot{\zeta}(t) = J\zeta(t) + G\Delta d(t) - GLb(t),$$

et un choix judicieux de certains g_i orthogonaux à des colonnes de Δ ou de L permet de rejeter bruits ou perturbations dans l'observation.

Le placement de structure par bouclage d'état peut être décomposé en deux étapes : tout d'abord une modification des valeurs propres en boucle fermée, il s'agit d'un placement de pôles, puis dans un deuxième temps, et ceci est une spécificité des systèmes multi-entrées, on peut envisager un placement des vecteurs propres du système en boucle fermée. Dans la partie suivante, nous allons regarder le problème et la résolution du placement de pôles, puis dans la troisième partie nous traiterons du problème du placement de vecteurs propres. L'utilisation d'autres techniques de commande, comme la commande LQ, conduit à un placement de structure implicite que nous évoquerons dans une section particulière.

5.2 Placement de pôles

Suivant l'annexe C, lorsque le système (12) est commandable, celui-ci, par le changement de variable, $x_C = T_C x$, et le changement de commande, $u_C = H_C u$, où H_C est la matrice $(m \times m)$ formée des lignes significatives de B_C :

$$H_C = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

peut être mis sous la forme canonique commandable :

$$\dot{x}_C(t) = A_C x_C(t) + \bar{B}_C u_C(t), \quad (15)$$

où, les μ_i sont les indices de commandabilité et :

$$A_C = \begin{bmatrix} A_C^{11} & A_C^{12} & \cdots & A_C^{1m} \\ A_C^{21} & A_C^{22} & \cdots & A_C^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_C^{m1} & A_C^{m2} & \cdots & A_C^{mm} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_C = \text{diag} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mu_i \right\},$$

avec A_C^{ij} une matrice $(\mu_i \times \mu_j)$ ayant la structure suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } i = j, A_C^{ii} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & a_C^{ii} & \end{bmatrix}, \\ \text{si } i \neq j, A_C^{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & a_C^{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette structure va permettre un résolution simple du problème de placement de pôles. En effet, comme une matrice compagne retrouve sur sa dernière ligne l'opposé des coefficients de son polynôme caractéristique :

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix} \right) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

et que le polynôme caractéristique est inchangé par un changement de variables d'état, une détermination du gain de bouclage va passer par les étapes suivantes :

1. Décomposition du polynôme caractéristique désiré $\tilde{a}(\lambda)$ en m polynômes caractéristiques $\tilde{a}_i(\lambda)$, chacun de degré μ_i :

$$\tilde{a}(\lambda) = \prod_{i=1}^m \tilde{a}_i(\lambda).$$

2. Soient \tilde{a}_C^{ii} les m vecteurs lignes formés par les opposés des coefficients des polynômes $\tilde{a}_i(\lambda)$ et \tilde{A}_C^{ii} , la matrice compagne associée :

$$\tilde{A}_C^{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \tilde{a}_C^{ii} & \end{bmatrix}, \quad (16)$$

et $\tilde{A}_C = \text{diag} \{ \tilde{A}_C^{ii} \}$.

3. Soit K_C le gain de retour d'état en x_C que l'on va partitionner en :

$$K_C = \begin{bmatrix} k_C^{11} & k_C^{12} & \cdots & k_C^{1m} \\ k_C^{21} & k_C^{22} & \cdots & k_C^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_C^{m1} & k_C^{m2} & \cdots & k_C^{mm} \end{bmatrix},$$

où les k_C^{ij} sont des vecteurs ligne de μ_i composantes.

4. Grâce à la structure de \overline{B}_C , on peut obtenir :

$$\tilde{A}_C = A_C - \overline{B}_C K_C.$$

Il suffit pour cela de prendre :

- pour $i \neq j$, $k_C^{ij} = a_C^{ij}$;
- pour $i = j$, $k_C^{ii} = a_C^{ii} - \tilde{a}_C^{ii}$.

5. Comme $K_C = H_C K T_C^{-1}$, on obtient l'expression du gain de retour d'état en x :

$$K = H_C^{-1} K_C T_C.$$

Remarques :

- cette détermination, qui n'est pas unique, généralise celle obtenue dans le cas mono-entrée (*cf.* annexe E) ;
- pour placer les n pôles du système, nous n'avons besoin que de n paramètres. Or K possède nm paramètres à déterminer qu'ici nous avons tous utilisés. En regardant un peu mieux, on aurait pu se contenter d'utiliser que :

$$\sum_{i=1}^m i \mu_i$$

paramètres pour arriver au même résultat. Toujours est-il que l'on a utilisé beaucoup plus de paramètres que nécessaire pour placer les pôles du système. Nous allons voir dans la suite que les paramètres qui restent peuvent être utilisés pour placer quelques vecteurs propres du système bouclé.

5.3 Placement de structure

De façon plus précise, il a été établi dans [19], que pour le système (12) commandable avec rang $B = m$ et rang $C = l$, on peut placer arbitrairement :

- max (m, l) valeurs propres ;
- min (m, l) composantes de chaque vecteur propre correspondant.

Le fait de considérer ici une forme plus générale de l'équation d'état (12) où le nombre de sorties diffère du nombre d'entrées permet de considérer comme cas particuliers :

- le cas du retour d'état, en faisant $C = I$ donc $l = n$, et on s'aperçoit alors qu'un retour d'état permet de placer toutes les valeurs propres en boucle fermée et seulement m composantes des vecteurs propres ;
- le cas du retour de sortie, en faisant $l = m$, et on s'aperçoit que l'on peut placer seulement m valeurs propres du système en boucle fermée ;
- le cas du retour de mesures, où on dispose de plus de mesures que de sorties à contrôler avec $l > m$.

La clé du placement de la structure du système en boucle fermée, c'est-à-dire le placement de la paire (J, D) correspondant à la décomposition de Jordan de la matrice $A - BK$ obtenue après le retour d'état (13), repose sur la relation :

$$(A - BK)D = DJ.$$

En supposant que la matrice J est diagonale, ce qui n'est pas restrictif pour des raisons de robustesse évoquées plus haut⁴, en reprenant les notations précédentes, soit :

$$J = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ et } D = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n],$$

⁴Cela aussi simplifie notablement les calculs. Le cas des valeurs propres multiples peut tout à fait être envisagé et est décrit avec force détails dans [19].

la relation précédente s'écrit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (A - BK)d_i = \lambda_i d_i.$$

Le problème consiste donc à chercher K telle que cette relation soit vérifiée lorsque les vecteurs de D ont certaines composantes imposées ou vérifient certaines contraintes qui s'expriment sous la forme d'une relation linéaire $E_i d_i = 0$.

De façon à résoudre ce problème, on introduit les vecteurs, pour $i = 1$ à n , $\delta_i = Kd_i$, et les relations précédentes se ramènent à résoudre n systèmes linéaires, pour $i = 1$ à n :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ E_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = 0.$$

La résolution de ces systèmes, par exemple en utilisant la décomposition en valeurs singulières décrite à l'annexe F, conduit aux n paires de vecteurs (d_i, δ_i) . Soit $\Delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]$, comme $\Delta = KD$, on obtient le gain du bouclage d'état par :

$$K = \Delta D^{-1}.$$

Remarques :

1. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la qualité des valeurs propres désirées λ_i , et le calcul précédent reste valide, mais dans le cas où celle-ci est complexe, soit $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, on préfère (mais ce n'est pas obligatoire) l'associer à sa valeur propre conjuguée, soit $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i = \alpha_i - j\beta_i$. On va ainsi chercher des vecteurs réels en groupant les deux relations concernées et en les remplaçant par la résolution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} A - \alpha_i I & \beta_i I & -B & 0 \\ -\beta_i I & A - \alpha_i I & 0 & -B \\ \Re(E_i) & \Im(E_i) & 0 & 0 \\ -\Im(E_i) & \Re(E_i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_{i+1} \\ \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{bmatrix} = 0.$$

2. Le même calcul est également valable pour le placement des vecteurs propres gauches.
3. Notons également que le nombre de contraintes linéairement indépendantes est limité car si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ E_i & 0 \end{bmatrix} = n + m,$$

alors $d_i = 0$ et $\delta_i = 0$. Cette solution n'est pas admissible. De plus lorsque :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ E_i & 0 \end{bmatrix} = r < n + m,$$

cela signifie que l'on dispose de $n + m - r$ paramètres libres de réglage dont vont dépendre les valeurs de d_i et δ_i . L'utilisateur peut alors choisir la valeur de ces paramètres pour satisfaire éventuellement des contraintes supplémentaires.

6 Autre forme de placement de pôles

L'un des principaux problèmes auquel on a à faire face en placement de structure concerne le choix des valeurs propres désirées en boucle fermée. Pour résoudre ce problème une bonne connaissance du système et de ses limitations est nécessaire et l'emploi de règles heuristiques ou de règles propres au domaine concerné permet parfois de se faire une idée de l'objectif à atteindre. Nous allons voir cependant deux techniques qui permettent, pour la première de fixer les dynamiques en boucle fermée en fonction ce que l'on veut que le système exécute, et pour la deuxième, d'obtenir les valeurs propres *a posteriori* en fonction d'un critère d'optimalité à satisfaire.

6.1 Par platitude

Lorsque l'on construit la forme canonique commandable (15) du système en boucle ouverte, on s'aperçoit que si l'on connaît certaines composantes de $x_C(t)$ sur un intervalle donné alors toutes les autres variables, $y(t)$ mais aussi la commande $u(t)$ sont entièrement déterminées sur cet intervalle.

De façon plus précise ces composantes peuvent être regroupées dans le vecteur :

$$z(t) = \begin{bmatrix} x_{C,1}(t) \\ x_{C,\mu_1+1}(t) \\ x_{C,\mu_1+\mu_2+1}(t) \\ \vdots \\ x_{C,\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{m-1}+1}(t) \end{bmatrix},$$

appelé sortie plate [7] du système et l'on obtient la relation :

$$\begin{aligned} A(p)z(t) &= u_C(t), \\ y(t) &= C(p)z(t), \end{aligned} \quad (17)$$

où $A(p)$ est une matrice polynomiale de degré $\mu = \max \{\mu_i\}$ et $C(p)$ une matrice polynomiale de degré $\mu - 1$. On pourra noter que la sortie plate n'est rien d'autre, à un changement de variables près que l'état partiel mis en évidence dans (11).

L'intérêt de la commande par platitude consiste à utiliser les relations (17) pour générer :

- une commande boucle ouverte, la nominale $u_C^d(t)$ correspondant à l'exécution d'une trajectoire désirée sur la sortie plate $z_d(t)$ par $u_C^d(t) = A(p)z_d(t)$;
- une commande boucle fermée permettant de suivre asymptotiquement cette trajectoire.

Pour construire cette dernière commande, on introduit les notations suivantes :

- $A(p) = \text{diag} \{p^{\mu_i}\} + A^*(p)$;
- pour $i = 1$ à m , $d_i(p)$ est le polynôme caractéristique des matrices (16).

La commande :

$$u_C(t) = \text{diag} \{p^{\mu_i}\}z_d(t) + \text{diag} \{d_i(p) - p^{\mu_i}\}(z(t) - z_d(t)) + A^*(p)z(t), \quad (18)$$

permet d'obtenir une erreur de poursuite $e(t) = z(t) - z_d(t)$ régie par :

$$\text{diag} \{d_i(p)\}e(t) = 0.$$

Cette erreur tendra asymptotiquement vers 0 si les polynômes ont leur racines à partie réelle négative. De plus ces racines qui correspondent aux dynamiques de l'erreur de poursuite peuvent être choisies en fonction de la trajectoire à poursuivre. La commande par platitude constitue donc une aide précieuse dans le choix des dynamiques désirées pour la boucle fermée.

Lorsque l'on interprète (18), en tenant compte du fait que les dérivées des composantes de $z(t)$ sont les composantes de l'état $x_C(t)$, la commande précédente peut être écrite sous la forme du retour d'état :

$$u_C(t) = r_d(t) - K_C T_C^{-1} x(t),$$

où apparaît le fait que le terme $Fr(t)$ du bouclage d'état habituel doit être remplacé par $r_d(t)$ qui met en évidence que la consigne a essentiellement pour objectif l'exécution d'une trajectoire désirée sur la sortie plate.

6.2 Par commande LQ

Le principe de la commande LQ (Linéaire Quadratique) [2, 18] consiste à chercher le bouclage d'état⁵ $u(t) = -Kx(t)$ tel que soit minimisé le critère :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt,$$

pour le système (12) avec Q et R deux matrices définies positives. L'utilisation des principes d'optimalité conduit à écrire la solution cherchée sous la forme :

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t),$$

où P est la solution définie positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

En écrivant $Q = N^T N$ et $BR^{-1}B^T = MM^T$, lorsque la paire (A, M) est commandable et la paire (A, N) est observable, la solution définie positive de l'équation de Riccati existe toujours et est unique. De plus, dans les mêmes conditions, la matrice en boucle fermée obtenue $A - BR^{-1}B^T P$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative.

L'un des intérêts de la commande LQ consiste à garantir une bonne robustesse vis-à-vis d'erreurs sur les gains des canaux d'entrées. Cependant il n'est pas possible d'imposer *a priori* les dynamiques en boucles fermées qui correspondent à l'optimalité d'un critère quadratique.

7 Retour de sortie

Comme $y(t) = Cx(t)$, le retour de sortie (ou de mesures pour être plus exact) :

$$u(t) = Fr(t) - Ky(t), \tag{19}$$

conduit au système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) + BFr(t),$$

et il s'agit ici de chercher le gain K de façon à imposer la structure de $A - BKC$ ou tout au moins une partie de la structure. En reprenant les notations de la partie précédente, la clé du placement de structure réside dans la relation :

$$(A - BKC)D = DJ,$$

soit, pour $i = 1$ à n :

$$(A - BKC)d_i = \lambda_i d_i.$$

De même que précédemment, l'introduction des vecteurs $\delta_i = KCd_i$, permet d'écrire ces relations sous la forme de n équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = 0.$$

Pour simplifier nous ne rajoutons pas de contraintes supplémentaires mais cela pourrait être envisagé comme cela a été fait dans le cas du retour d'état. La résolution de ces n équations fournit n paires (d_i, δ_i) compatibles permettant de construire les matrices D et Δ .

⁵Pour simplifier, nous nous placerons ici dans un contexte de régulation autour de 0 et non de poursuite de trajectoire.

Pour résoudre le problème initial, il s'agit maintenant de chercher la matrice K de taille $(m \times m)$ vérifiant l'identité :

$$\Delta = KCD.$$

Comme CD est une matrice $(m \times n)$ elle est non inversible. De façon à contourner cet inconvénient, il faut sélectionner m valeurs propres λ_i parmi celles désirées en boucle fermée, que l'on regroupe dans l'ensemble Λ_m telles que les vecteurs d_i correspondants permettent de construire la matrice D_{Λ_m} de taille $(n \times m)$ telle que CD_{Λ_m} soit inversible. Soit Δ_{Λ_m} la matrice des vecteurs δ_i correspondants, le gain de bouclage qui place ces m valeurs propres est donné par :

$$K = \Delta_{\Lambda_m}(CD_{\Lambda_m})^{-1}.$$

Les $n - m$ autres valeurs propres ne correspondent pas en général à celles désirées et dans le cas où elles sont trop distinctes de ce qui est admissible, il y a lieu d'envisager un retour dynamique de sortie par l'intermédiaire d'un observateur d'état. Cela est toujours possible mais au prix d'une dégradation de la robustesse de la commande relativement à des erreurs sur les paramètres ou relativement à des dynamiques négligées au niveau de la modélisation du système.

A Exemples de modèles de systèmes

Quelques modèles linéarisés de systèmes multivariables

Ces modèles sont donnés sous la forme d'une équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

correspondant au modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

A.1 Modèle d'un sous-marin

La manœuvre dans le plan vertical de la descente ou montée d'un sous-marin est réalisée à l'aide des gouvernes de proue ou de poupe. Comme une phase de plongée ou de remontée doit être réalisée à assiette constante, il est nécessaire d'agir sur les deux commande. Cela conduit à nécessairement étudier un système mutivariable qui présente comme caractéristiques principales un couplage entre les entrées et les sorties et des entrées à actions antagonistes. En effet, manœuvrer une seule des eux gouvernes modifie à la fois la position verticale du centre de gravité du sous-marin et son assiette, et actionner les gouvernes dans un sens identique conduit à des effets qualitativement opposés. On peut remarquer que l'on aurait des caractéristiques analogues si l'on s'intéressait aux modèles de vol des avions.

A.1.1 Modélisations du comportement

Modèles linéarisés autour de deux vitesses de fonctionnement, 6 nœuds et 30 nœuds.

Variables :

– commandes : angles des gouvernes de proue et de poupe :

$$u_1 = \delta b, \quad u_2 = \delta s;$$

– sorties : profondeur et angle de tangage :

$$y_1 = \delta h, \quad y_2 = \delta \theta;$$

A.1.2 Modèle d'état

$$u = [u_1 \quad u_2]^T, \quad y = [y_1 \quad y_2]^T, \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 = y_1 \quad x_4 = y_2]^T,$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 1 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

1. Pour une vitesse de 6 nœuds :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.038006; & a_{12} &= 0.89604; & a_{14} &= 0.0014673; \\ a_{21} &= 0.0017105; & a_{22} &= -0.091676; & a_{24} &= -0.0056095; \\ a_{34} &= -3.0867; & b_{11} &= -0.007542; & b_{12} &= -0.022859; \\ b_{21} &= 0.0017323; & b_{22} &= -0.0022217; \end{aligned}$$

2. Pour une vitesse de 30 nœuds :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.19003; & a_{12} &= 4.4802; & a_{14} &= 0.0014673; \\ a_{21} &= 0.0085526; & a_{22} &= -0.45988; & a_{24} &= -0.0056095; \\ a_{34} &= -15.433; & b_{11} &= -0.1855; & b_{12} &= -0.57149; \\ b_{21} &= 0.043308; & b_{22} &= -0.055543; \end{aligned}$$

A.1.3 Modèle transfert

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

1. Pour une vitesse de 6 nœuds :

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= (p + 0.062829)(p^2 + 0.067152p + 0.0033532); \\ H_{11}(p) &= -\frac{0.007542(p + 0.54578)(p + 0.049356)}{p}; \\ H_{12}(p) &= -\frac{0.022859(p + 0.060304)(p - 0.18124)}{p}; \\ H_{21}(p) &= 0.0017266(p + 0.030559); \\ H_{22}(p) &= -0.0022144(p + 0.055605); \end{aligned}$$

2. Pour une vitesse de 30 nœuds :

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= (p + 0.55476)(p + 0.0066662)(p + 0.0028485); \\ H_{11}(p) &= -\frac{0.18855(p + 2.7789)(p + 0.19681)}{p}; \\ H_{12}(p) &= -\frac{0.57149(p + 0.40667)(p - 1.0113)}{p}; \\ H_{21}(p) &= 0.0431654(p + 0.15279); \\ H_{22}(p) &= -0.0553618(p + 0.27803); \end{aligned}$$

A.2 Avion

En prenant comme variables :

- de commande :
 - l'angle de la gouverne de profondeur (en dixièmes de degrés);
 - la poussée (en m.s^{-2});
 - l'angle de la gouverne d'élévation (en degrés);
- d'état :
 - l'altitude (par rapport à une référence)
 - la vitesse horizontale (en m.s^{-1});
 - l'angle de tangage (en degrés);
 - la vitesse de tangage (en degrés.s^{-1});
 - la vitesse verticale (en m.s^{-1});
- de sortie : les trois premiers états;

le modèle linéarisé du comportement dynamique dans le plan vertical d'un avion peut être décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A.3 Turbo-générateur

Modèle linéarisé d'un turbo-alternateur de grande dimension à deux entrées (la position de la valve d'alimentation et la commande d'inducteur), deux sorties (la tension générée et la position angulaire du générateur) et 6 états décrit par les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -18.4456 & 4.2263 & -2.283 & 0.226 & 0.422 & -0.0951 \\ -4.0977 & -6.0706 & 5.6825 & -0.6966 & -1.2246 & 0.2873 \\ 1.4449 & 1.4336 & -2.6477 & 0.6092 & 0.8979 & -0.23 \\ -0.0093 & 0.2302 & -0.5002 & -0.1764 & -6.3152 & 0.135 \\ -0.0464 & -0.3489 & 0.7238 & 6.3117 & -0.6886 & 0.3645 \\ -0.0602 & -0.2361 & 0.23 & 0.0915 & -0.3214 & -0.2087 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2748 & 3.1463 \\ -0.0501 & -9.3737 \\ -0.155 & 7.4296 \\ 0.0716 & -4.6176 \\ -0.0814 & -10.2648 \\ 0.0244 & 13.7943 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5971 & -0.7697 & 4.885 & 4.8608 & -9.8177 & -8.861 \\ 3.1013 & 9.3422 & -5.6 & -0.749 & 2.9974 & 10.5719 \end{bmatrix}.$$

– échange de deux lignes (resp. colonnes) :

$$E_3(i, j) = \text{diag} \left\{ \begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & & & 0 \\ 1, \dots, 1, & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\}. \quad (26)$$

On peut remarquer que chacune de ces matrices élémentaires est unimodulaire :

$$\det E_1 = \alpha, \det E_2 = 1, \det E_3 = -1. \quad (27)$$

A l'aide d'une suite de transformations élémentaires gauches et droites judicieusement choisies, toute matrice polynomiale $A(\lambda)$ de taille $(m \times n)$ peut être mise sous la forme d'une matrice diagonale à laquelle elle est équivalente :

$$S(\lambda) = \text{diag} \{a_1(\lambda), \dots, a_s(\lambda), 0, \dots, 0\}. \quad (28)$$

La matrice obtenue est sa forme de Smith et possède la propriété que les polynômes $a_1(\lambda)$ à $a_s(\lambda)$ ont leur coefficient de degré le plus élevé est égal à 1 et, pour $j = 2$ à s $a_j(\lambda)$ est divisible par $a_{j-1}(\lambda)$ sans reste. Remarque : cette forme de Smith est unique et indépendante de l'ordre des opérations sur les lignes et les colonnes que l'on effectuera.

Démonstration : Soit $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ une $(m \times n)$ matrice polynomiale. Par une permutation de lignes ou de colonnes, on peut toujours se ramener à un coefficient $a_{11}(\lambda)$ non nul de degré minimum.

Soient les quotients et les restes de la division de $a_{1i}(\lambda)$ et $a_{j1}(\lambda)$ par $a_{11}(\lambda)$:

$$i = 2, \dots, n, \quad a_{1i}(\lambda) = q_{1i}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{1i}(\lambda), \quad (29)$$

$$j = 2, \dots, m, \quad a_{j1}(\lambda) = q_{j1}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{j1}(\lambda). \quad (30)$$

Si l'un au moins de tous les restes est non nul, par exemple $r_{1i}(\lambda)$, alors en retranchant de la i -ième colonne la première multipliée par $q_{1i}(\lambda)$, on remplace $a_{1i}(\lambda)$ par $r_{1i}(\lambda)$ qui est de degré inférieur à celui de $a_{11}(\lambda)$. En recommençant cette opération, on arrive donc par une suite d'opérations élémentaires gauches ou droites au cas où tous les restes sont identiquement nuls.

Dans ce cas, en retranchant de la j -ième ligne, la première multipliée par $q_{j1}(\lambda)$, et de la i -ième colonne la première multipliée par $q_{1i}(\lambda)$, la matrice polynomiale prend la forme équivalente :

$$A_1(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \dots & b_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

Si au moins l'un des éléments $b_{ij}(\lambda)$ n'est pas divisible sans reste par $a_1(\lambda)$, en ajoutant à la première ligne, la ligne qui contient un tel élément, on se retrouve au cas précédent. On peut alors de nouveau remplacer $a_1(\lambda)$ par un polynôme de degré inférieur.

Comme tous les coefficients de $A(\lambda)$ sont des polynômes de degrés finis, par un nombre d'opérations fini, on se ramène à une matrice $A_1(\lambda)$ telle que tous les éléments $b_{ij}(\lambda)$ sont divisibles sans reste par $a_1(\lambda)$.

Si au moins un des éléments $b_{ij}(\lambda)$ est non nul, on recommence l'opération encore une fois ce qui conduit à mettre $A(\lambda)$ sous la forme équivalente :

$$A_2(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{m3}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

où $a_2(\lambda)$ est divisible sans reste par $a_1(\lambda)$.

En continuant l'algorithme, on met nécessairement, après un nombre fini d'opérations, $A(\lambda)$ sous la forme équivalente $S(\lambda)$ (28) où chaque polynôme $a_i(\lambda)$ est divisible sans reste par le précédent.

Par des multiplications par des scalaires on peut rendre chacun de ces polynômes unitaires et dans ce cas la forme de Smith est unique. De plus, en faisant le produit des matrices de transformation à droite et à gauche utilisées on obtient deux matrices unimodulaires $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ telles que :

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = S(\lambda), \quad (33)$$

ce qui peut s'écrire aussi sous la forme de la décomposition de Smith de $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)S(\lambda)Q^{-1}(\lambda), \quad (34)$$

où $P^{-1}(\lambda)$ et $Q^{-1}(\lambda)$ sont des matrices polynomiales. Il est à noter que bien que $S(\lambda)$ soit unique les matrices $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ ne le sont pas, et la preuve utilisée est constructive pour déterminer la décomposition de Smith d'une matrice polynomiale. En effet :

$$\begin{aligned} [E_1(\alpha)]^{-1} &= E_1((\alpha)^{-1}), \\ [E_2(i, j, p(\lambda))]^{-1} &= E_2(i, j, -p(\lambda)), \\ [E_3(i, j)]^{-1} &= E_3(i, j). \end{aligned}$$

C Formes canoniques d'une équation d'état

Nous allons dans cette partie décrire l'algorithme de Luenberger qui permet de mettre sous une forme canonique une équation d'état de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{m-1} \quad b_m], \\ y &= Cx, y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

C.1 Forme canonique commandable

Test préliminaire :

$$\text{rang} [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$$

1. Dans :

$$\mathcal{C}_{(A,B)} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B],$$

en allant de gauche à droite (\rightarrow), on sélectionne une colonne si elle n'est pas linéairement dépendante des précédentes.

2. On calcule les m indices de commandabilité μ_i , pour $i = 1, \dots, m$, comme le plus petit entier k tel que $A^k b_i$ soit linéairement dépendante des colonnes précédentes. On calcule également les indices cumulés de commandabilité σ_i :

$$i = 1, \dots, m, \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^i \mu_j.$$

3. On réordonne les colonnes sélectionnées au pas 1 pour construire la matrice :

$$V = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \dots & A^{\mu_1-1}b_1 & b_2 & Ab_2 & \dots & A^{\mu_2-1}b_2 \\ & & & & \dots & b_m & Ab_m & \dots & A^{\mu_m-1}b_m \end{bmatrix}$$

4. On calcule V^{-1} , d'où l'on extrait les σ_i -ièmes lignes. Soient L_i , $i = 1, \dots, m$, ces lignes.
5. On construit la matrices de changement de variables :

$$T_C = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_1 A \\ \vdots \\ L_1 A^{\mu_1-1} \\ L_2 \\ L_2 A \\ \vdots \\ L_2 A^{\mu_2-1} \\ \vdots \\ L_m \\ L_m A \\ \vdots \\ L_m A^{\mu_m-1} \end{bmatrix}.$$

6. La transformation :

$$x_C = T_C x,$$

conduit à l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= A_C x_C + B_C u, \\ y &= C_C x_C, \end{aligned}$$

$$B_0 = T_0 B,$$

$$\bar{C}_0 = H_0^{-1} C T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \leftarrow \nu_1 \rightarrow & \leftarrow \nu_2 \rightarrow & & \leftarrow \nu_m \rightarrow \end{bmatrix}.$$

Les indices $\nu_i, i = 1, \dots, m$, mis en évidence pour la construction de cette forme s'appellent les indices d'observabilité.

D Forme de Jordan d'une matrice

Théorème 2 *Toute matrice carrée A est semblable à sa forme de Jordan :*

$$J = \text{diag} \{J_1, \dots, J_\rho\},$$

où J_i est le bloc de Jordan ($n_i \times n_i$) :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \tag{35}$$

dans lequel les $\lambda_i, i = 1, \dots, \rho$, sont les valeurs propres de A qui vérifient :

$$i = 1, \dots, \rho, \exists v_i \neq 0, Av_i = \lambda_i v_i.$$

Lorsque deux λ_i et λ_j sont égaux, la matrice est dite défective. Suivant ce résultat, il existe une matrice régulière P telle que $J = PAP^{-1}$. Nous allons donner ici la méthode de construction de la matrice P . Comme $P^{-1}J = AP^{-1}$, si l'on note les vecteurs composant P^{-1} sous la forme :

$$P^{-1} = [v_1^1 \quad v_1^2 \quad \dots \quad v_1^{n_i} \quad \dots \quad v_i^1 \quad \dots \quad v_i^{n_i} \quad \dots \quad v_\rho^1 \quad \dots \quad v_\rho^{n_i}],$$

où les $n_i, i = 1, \dots, \rho$ sont les tailles des blocs de Jordan J_i , on obtient pour tout i dans $\{1, \dots, \rho\}$:

$$\begin{aligned} \lambda_i v_i^1 &= Av_i^1, \\ \lambda_i v_i^2 + v_i^1 &= Av_i^2, \\ &\vdots \\ \lambda_i v_i^{n_i} + v_i^{n_i-1} &= Av_i^{n_i}. \end{aligned}$$

Ainsi les couples (λ_i, v_i^1) vérifient $(\lambda_i I - A)v_i^1 = 0$, c'est-à-dire que les λ_i , valeurs propres de A , sont les complexes qui rendent singulière la matrice caractéristique $A_\lambda = \lambda I - A$, et les v_i^1 , vecteurs propres de A , sont les vecteurs linéairement indépendants qui engendrent $\mathcal{N}(A_{\lambda_i}), i = 1, \dots, \rho$. Les autres vecteurs v_i^2 à $v_i^{n_i}$, qui s'appellent les vecteurs propres généralisés de A , vérifient, pour tout i dans $\{1, \dots, \rho\}$, $A_{\lambda_i}^2 v_i^2 = 0, \dots, A_{\lambda_i}^{n_i} v_i^{n_i} = 0$, c'est-à-dire qu'ils engendrent $\mathcal{N}(A_{\lambda_i}^k), k = 1, \dots, n_i$. La suite des vecteurs $(v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{n_i})$ constitue la i -ième chaîne de Jordan de A et donne directement les colonnes de P^{-1} . La construction de J et P s'opère donc de la façon suivante :

1. Recherche des valeurs propres de $A : \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$.
2. Recherche des ρ vecteurs linéairement indépendants $v_i^1, i = 1, \dots, \rho, \rho \geq r$, qui engendrent les espaces $\mathcal{N}(A_{\lambda_i}), i = 1, \dots, r$. A chacun de ces vecteurs est associée une valeur propre et le nombre de vecteurs associés à une même valeur propre λ_i est donné par $\dim \mathcal{N}(A_{\lambda_i})$.
3. Construction des chaînes de Jordan associées, soit pour $i = 1, \dots, \rho : V_i = \{v_i^1, \dots, v_i^{n_i}\}$.
4. Construction de $P^{-1} = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_\rho]$.
5. Inversion de P^{-1} , ce qui donne P .
6. Construction de J sous la forme : $J = \text{diag} \{J_1, \dots, J_\rho\}$.

Dans le cas où la forme de Jordan d'une matrice est diagonale, celle-ci est dite diagonalisable.

Théorème 3 Une matrice A est diagonalisable si et seulement si l'une de deux conditions suivantes est vérifiée :

- pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace vectoriel propre associé est égal à son ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique ;
- son polynôme caractéristique et son polynôme minimal sont identiques.

E Cas des systèmes mono-entrée

Nous allons considérer ici le placement de pôles dans le cas particulier des systèmes mono-entrée. En effet, nous allons voir que, dans ce cas, on peut obtenir directement des formules explicites pour le calcul du gain k de retour d'état sans avoir besoin, comme dans le cas multi-entrées de passer par une forme canonique. D'autre part, comme le nombre n des coefficients de réglage, composantes du gain de retour d'état étant identique au nombre de pôles à placer, il n'y a pas lieu de se poser le problème du placement de vecteurs propres. Par contre, si seulement une partie des pôles devaient être placés, *e.g.* r , alors on pourrait utiliser $n - r$ composantes de k pour placer des vecteurs propres, mais cela ne sera pas considéré ici.

Considérons le système mono-entrée d'ordre n , supposé commandable :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (36)$$

pour lequel on cherche le bouclage d'état :

$$u(t) = gv(t) - kx(t).$$

De façon à bien insister, comme $u(t)$ et $v(t)$ sont des scalaires, b est un vecteur colonne, k un vecteur ligne, chacun de n composantes et g un scalaire. Après bouclage, on obtient le système :

$$\dot{x}(t) = (A - bk)x(t) + gbu(t),$$

et nous noterons $\tilde{A} = A - bk$, a (resp. \tilde{a}) le vecteur des coefficients du polynôme caractéristique de A (resp. \tilde{A}) noté $a(\lambda)$ (resp. $\tilde{a}(\lambda)$) :

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i,$$

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-2} \\ \tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}(\lambda) = \det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i \lambda^i.$$

A partir de ces notations nous allons donner quelques formules explicites donnant k lorsque les \tilde{a}_i sont connus, donc lorsque les pôles en boucle fermée sont fixés.

E.1 Forme canonique mono-entrée

Bien que cette forme ne soit pas nécessaire dans les formules explicites du gain, nous en aurons besoin pour établir certaines d'entre elles. Le système (36) étant commandable, il est semblable à la forme canonique :

$$z(t) = A_c z(t) + b_c u(t),$$

où $z(t) = Px(t)$ et :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer P , on dispose de 2 formules :

1. A partir de la relation entre les matrices de commandabilité :

$$C_{[A,b]} = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b],$$

$$C_{[A_c, b_c]} = [b_c \quad A_c b_c \quad A_c^2 b_c \quad \cdots \quad A_c^{n-1} b_c],$$

soit :

$$C_{[A_c, b_c]} = PC_{[A,b]},$$

ce qui donne :

$$P = C_{[A_c, b_c]} C_{[A,b]}^{-1}.$$

2. A partir des relations :

$$P^{-1}b_c = b, \quad P^{-1}A_c = AP^{-1},$$

et en notant c_i la i -ème colonne de P^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} c_n &= b, \\ -a_0 c_n &= A c_1, \\ -a_1 c_n + c_1 &= A c_2, \\ &\vdots \\ -a_{n-1} c_n + c_{n-1} &= A c_n, \end{aligned}$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} c_n &= b, \\ c_{n-1} &= Ab + a_{n-1}b, \\ c_{n-2} &= A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b, \\ &\vdots \\ c_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1b. \end{aligned}$$

L'introduction de la matrice régulière :

$$T_A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

permet d'écrire :

$$P^{-1} = C_{[A,b]} T_A.$$

On peut remarquer qu'en comparant les deux formules qui donnent P , on obtient la relation :

$$T_A^{-1} = C_{[A_c, b_c]}.$$

D'autre part, comme placer les valeurs propres de A revient à placer celles de A_c mais avec un gain $k_c = kP^{-1}$ de retour d'état $z(t)$, et que ce gain est simplement donné par :

$$k_c = (\tilde{a} - a)^T,$$

on obtient une première formule pour le gain :

$$k = (\tilde{a} - a)^T P.$$

E.2 Formule de Bass et Gura

Remarquons d'abord que l'on peut écrire la relation :

$$\tilde{a}(\lambda) = \det(\lambda I - A + bk) = a(\lambda) (1 + k(\lambda I - A)^{-1}b).$$

L'utilisation de la formule de Leverrier :

$$a(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} = I\lambda^{n-1} + (A + a_{n-1}I)\lambda^{n-2} + (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)\lambda^{n-3} + \cdots + (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I),$$

permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 - a_0 &= k(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b), \\ \tilde{a}_1 - a_1 &= k(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_3Ab + a_2b), \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{n-2} - a_{n-2} &= k(Ab + a_{n-1}b), \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} &= kb, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$\tilde{a} - a = T_A C_{[A,b]}^T k^T.$$

On obtient ainsi la formule de Bass et Gura :

$$k = [\tilde{a} - a]^T T_A^{-1} C_{[A,b]}^{-1}.$$

E.3 Formule de Ackermann

Lorsque l'on calcule $\tilde{a}(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i A^i$, l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0,$$

permet d'écrire :

$$\tilde{a}(A) = \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{a}_i - a_i) A^i.$$

D'une part, de façon identique, on obtient :

$$\tilde{a}(A_c) = \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{a}_i - a_i) A_c^i = P\tilde{a}(A)P^{-1}.$$

Et comme d'autre part, pour tout k dans $\{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A_c^k = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_k & \underbrace{1 \ 0 \cdots 0}_{n-k} \end{bmatrix},$$

on arrive à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P\tilde{a}(A)P^{-1} = (\tilde{a} - a)^T.$$

Cela donne $k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P\tilde{a}(A)$, mais comme $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} T_A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on obtient la formule de Ackermann :

$$k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} C_{[A,b]}^{-1} \tilde{a}(A).$$

Elle offre l'avantage de ne demander que le calcul de la dernière ligne de $C_{[A,b]}^{-1}$.

E.4 Formule de Mayne-Murdoch

Cette formule est basée sur la forme de Jordan J de la matrice A et l'équation d'état associée :

$$\dot{z}_J = Jz_J(t) + b_J u(t),$$

où $z_J(t) = P_J x(t)$, $J = P_J A P_J^{-1}$, et $b_J = P_J b$. Notons k_J le gain de retour d'état $z_J(t)$ et supposons, pour simplifier les expressions, que les valeurs propres de A , notées λ_i , et les valeurs propres de $A - bk$, notées μ_i , soient toutes distinctes.

Dans ces conditions on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{a}(\lambda)}{a(\lambda)} &= 1 + k(\lambda I - A)^{-1}b, \\ &= 1 + k_J(\lambda I - J)^{-1}b_J, \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{k_{iJ} b_{iJ}}{(\lambda - \lambda_i)}. \end{aligned}$$

Les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{\tilde{a}(\lambda)}{a(\lambda)}$ donnent les termes $k_{iJ} b_{iJ}$, et on obtient les composantes de k_J sous la forme :

$$k_{iJ} = \frac{1}{b_{iJ}} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_i - \mu_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

E.5 Application aux gains dyadiques

Le bouclage par gain dyadique permet de simplifier le placement de pôles des systèmes multi-entrées en se ramenant au cas des systèmes mono-entrée. Considérons le système multi-entrées :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

pour lequel on cherche le bouclage d'état :

$$u(t) = Gv(t) - Kx(t),$$

où cette fois $u(t)$ est un vecteur de m composantes. Chercher un bouclage par gain dyadique consiste à chercher K de la forme :

$$K = fk, \quad (37)$$

où f et k sont deux vecteurs de dimensions adaptées. Le bouclage par ce gain conduit au problème de placement de pôles sur un système mono-entrée avec $b = Bf$ dont on cherche le gain k . Ce problème sera soluble si et seulement si on peut trouver un vecteur b dans $\text{Im}\{B\}$ tel que :

$$\text{rang} [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b] = n.$$

Si cela est possible, la résolution du système toujours compatible $Bf = b$ donne f . L'utilisation des formules de calcul du gain fournissent k , et (37) donne K .

F Décomposition en valeurs singulières

F.1 Décomposition

Plus utilisée en pratique que la décomposition sous forme de Jordan car plus robuste d'un point de vue numérique, la décomposition en valeurs singulières d'une matrice met en évidence une matrice diagonale qui lui est équivalente. Elle jouera un rôle fondamental dans la généralisation au cas multivariable du lieu fréquentiel d'un système linéaire. Dans toute la suite $\|\cdot\|$ désignera la norme spectrale $\|\cdot\|_2$.

Théorème 4 *Pour toute matrice complexe $A(m \times n)$ il existe deux matrices unitaires $U(m \times m)$ et $V(n \times n)$, telles que :*

$$U^*AV = \Sigma,$$

où Σ est une matrice réelle $(m \times n)$ diagonale, $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$, avec $p = \min\{m, n\}$, et :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0.$$

Les σ_i apparaissant dans ce théorème sont appelées les valeurs singulières de A d'où le nom de la décomposition en valeurs singulières de A sous la forme :

$$A = U\Sigma V^*.$$

Comme :

$$A^*A = V\Sigma^T\Sigma V^*, \text{ et } AA^* = U\Sigma\Sigma^T U^*,$$

où $\Sigma^T\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2, 0, \dots, 0\}$ est une matrice $(n \times n)$ et $\Sigma\Sigma^T = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2, 0, \dots, 0\}$, est une matrice $(m \times m)$, où $p = \min(m, n)$, les valeurs singulières non nulles sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de la matrice A^*A mais aussi celles de la matrice AA^* . Notons $U = [u_1 \quad \dots \quad u_m]$ et $V = [v_1 \quad \dots \quad v_n]$, alors les u_i et les v_i , d'après les expressions précédentes reçoivent une interprétation en termes de vecteurs propres de AA^* ou A^*A :

– pour $i = 1, \dots, n$:

$$A^*Av_i = \sigma_i^2v_i,$$

– pour $i = 1, \dots, m$:

$$AA^*u_i = \sigma_i^2u_i.$$

Ainsi lorsque X et Y sont des matrices unitaires de dimensions convenables on a :

$$\sigma_i(XAY) = \sigma_i(A).$$

Comme on a également :

$$AV = U\Sigma, \text{ et } A^*U = V\Sigma^T,$$

on obtient les relations suivantes, avec $p = \min(m, n)$:

– pour $i = 1, \dots, p$:

$$Av_i = \sigma_iu_i, \text{ et } A^*u_i = \sigma_iv_i,$$

– pour $i = p + 1, \dots, \max(m, n)$:

$$Av_i = 0, \text{ et } A^*u_i = 0.$$

Géométriquement, les valeurs singulières d'une matrice sont les longueurs des demi-axes de l'hyper-ellipsoïde défini par :

$$\{y, y = Ax, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\},$$

et v_i leur direction. Ainsi v_1 est la direction dans laquelle $\|Ax\|$ est la plus grande sur $\|x\| = 1$ et v_n , la direction dans laquelle $\|Ax\|$ est la plus petite.

Théorème 5 Soient $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$, alors, en désignant par span l'espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs :

1. $\text{rang } A = r$;

2. $\mathcal{N}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ et $[\mathcal{N}(A)]^\perp = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$;

3. $\mathcal{I}(A) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$ et $[\mathcal{I}(A)]^\perp = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$;

4. En posant $U_r = [u_1 \ \dots \ u_r]$, $V_r = [v_1 \ \dots \ v_n]$, et $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$, on a :

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* = U_r \Sigma_r V_r^*.$$

5.

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = \text{trace}(A^*A)$$

Le résultat suivant est intéressant car il permet de fournir la meilleure approximation d'une matrice par une matrice de rang donnée :

Théorème 6 Soit $k < \text{rang } A$, et $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^*$, alors :

$$\min_{B, \text{rang}(B) \leq k} \|A - B\| = \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}.$$

Pour toutes matrices A et B , dont les tailles sont compatibles, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{i+j+1}(A+B) &\leq \sigma_{i+1}(A) + \sigma_{j+1}(B), \\ \sigma_{i+j+1}(AB) &\leq \sigma_{i+1}(A)\sigma_{j+1}(B). \end{aligned}$$

F.2 Valeurs singulières extrêmes

Notons $\bar{\sigma}(A)$ et $\underline{\sigma}(A)$ la plus grande et la plus petite valeur singulière d'une matrice A , d'après la partie précédente on a :

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$

et :

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

On dispose des propriétés suivantes :

- si $\lambda(A)$ est une valeur propre de A , alors :

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda(A)| \leq \bar{\sigma}(A);$$

- si A^{-1} existe, alors :

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2};$$

- pour tout réel α :

$$\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A), \underline{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \underline{\sigma}(A);$$

Lorsque les tailles sont compatibles :

$$|\bar{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B)| \leq \bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B),$$

$$\max \{ \underline{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B), \bar{\sigma}(A) \underline{\sigma}(B) \} \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B),$$

$$\max \{ \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B), \underline{\sigma}(B) - \bar{\sigma}(A) \} \leq \underline{\sigma}(A + B) \leq \min \{ \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B), \bar{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(B) \},$$

$$\max \{ 0, \bar{\sigma}(A) - 1 \} \leq \bar{\sigma}(A + I), \max \{ 0, \underline{\sigma}(A) - 1 \} \leq \underline{\sigma}(A + I),$$

$$\max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \} \leq \bar{\sigma} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \sqrt{2} \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \}.$$

F.3 Application à la résolution d'un système linéaire

Parmi les nombreuses techniques de résolution d'un système linéaire [29], l'utilisation de la décomposition en valeurs singulière est très utilisée car numériquement robuste. Considérons le système linéaire $Ax = y$ où A est une matrice réelle ($m \times n$) dont il s'agit de trouver la solution x . A partir de la décomposition en valeurs singulières de A , soit :

$$A = U \Sigma V^T,$$

où $r = \text{rang}(A)$, $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$, $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$. En introduisant les vecteurs $X = V^T x$ et $Y = U^T y$, le système linéaire s'écrit :

$$\Sigma X = Y,$$

soit :

- pour $i = 1$ à r , $\sigma_i X_i = Y_i$;
- pour $i = r + 1$ à m , $Y_i = 0$, cette dernière condition étant une condition de résolution de l'équation linéaire.

F.4 Conditionnement d'une matrice

Pour une matrice A inversible et une norme de matrice $\|\cdot\|$, le conditionnement de A est défini par :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Lorsque l'on désire préciser la norme utilisée on caractérise, par un indice, le conditionnement ainsi construit sous la forme :

$$\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

A titre d'exemple, on a :

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}.$$

Le conditionnement mesure la sensibilité de la solution d'un système linéaire vis-à-vis des variations sur les données, et doit être aussi proche que possible de 1. Soit A une matrice régulière ($n \times n$) et les systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A(x + \delta x) &= b + \delta b, \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b, \end{aligned}$$

où δb et ΔA sont des vecteurs et matrices de variations des données.

L'application d'une norme de vecteur et de sa norme de matrice associée conduit aux inégalités qui permettent de majorer les erreurs relatives sur la solution sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \{1 + o(\|\Delta A\|)\}, \end{aligned}$$

où $\lim_{\|\Delta A\| \rightarrow 0} o(\|\Delta A\|) = 0$.

Les conditionnements sont équivalents, c'est à dire que quelles que soient les normes subordonnées $N_1(A)$ et $N_2(A)$, en notant :

$$\text{cond}_{N_1}(A) = N_1(A)N_1(A^{-1}), \text{cond}_{N_2}(A) = N_2(A)N_2(A^{-1}),$$

il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 \text{cond}_{N_1}(A) \leq \text{cond}_{N_2}(A) \leq c_2 \text{cond}_{N_1}(A).$$

Références

- [1] Aström, K., Wittenmark, B., *Computer controlled systems*, Prentice Hall, 1984.
- [2] Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I., *Commande et optimisation des processus*, Technip, 1990.
- [3] Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I., *Modélisation et identification des processus*, Technip, 1991.
- [4] Borne, P., Rotella, F., *Commande optimale, Techniques de l'Ingénieur*, tome *Mesures et contrôle*, T. 8, R-7427, Dunod, 1996.
- [5] Delchamps, D.F., Polynomial and matrix fraction descriptions, chap. 27, pp. 481–493, *The Control Handbook*, Levine, W.S., ed., CRC Press, 1996.
- [6] Douglas, J., Athans, M., Multivariable poles, zeros and pole-zero cancellations, chap. 24, pp. 445–450, *The Control Handbook*, Levine, W.S., ed., CRC Press, 1996.
- [7] Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph, Rouchon, P., “Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and applications”, *Int. J. Control*, vol. 61, n. 6, pp. 1327-61, 1995.
- [8] Fossard, A.J., *Commande des systèmes multidimensionnels*, Dunod, 1972.
- [9] Fossard, A.J., Systèmes multientrées-multisorties, vol. R7, R7 220, *Techniques de l'Ingénieur*, 1997.
- [10] Fossard, A.J., Jupilliat, T., *Commande modale : application au pilotage d'un avion*, vol. R7, R7 433, *Techniques de l'Ingénieur*, 1997.
- [11] Grimble, M.J., *Robust industrial control*, Prentice Hall, 1998.
- [12] Hamano, F., Geometric theory of linear systems, chap. 26, pp. 469–480, *The Control Handbook*, Levine, W.S., ed., CRC Press, 1996.
- [13] Heymann, N., Pole assignment by state feedback and Luenberger observer, vol. 6, pp. 3717–3720, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [14] Isidori, A., *Nonlinear control systems*, Springer-Verlag, 1989.
- [15] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice Hall, 1980.
- [16] Karcaniyas, N., Linear multivariable systems : zeros, vol. 4, pp. 2827–2832, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [17] Kučera, V., *Analysis and design of discrete linear control systems*, Prentice Hall, 1991.
- [18] Lewis, F.L., Syrmos, V.L., *Optimal control*, John Wiley & Sons, 1995.
- [19] Liu, G.P., Patton, R.J., *Eigenstructure assignment*, John Wiley & Sons, 1998.
- [20] Luenberger, D.L., Canonical forms for multivariable systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-12, n. 3, pp.290–293, 1967.
- [21] Munro, N., Pole assignment : a review of methods, vol. 6, pp. 3710–3717, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [22] Nour Eldin, H.A., Linear multivariable systems controllability and observability : numerical aspects, vol. 4, pp. 2816–2827, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [23] Postlethwaite, I., Multivariable systems : robustness in design, vol. 5, pp. 3224–3228, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [24] Rotella, F., Singular systems, *Concise Encyclopedia of Modelling and Simulation*, Ed. D.P. Atherton and P. Borne, Pergamon Press, pp. 435-442, 1992.

- [25] Rotella, F., *Observateurs*, Support de cours, ENIT, 2001.
- [26] Rotella, F., *Filtrage optimal*, Support de cours, ENIT, 2001.
- [27] Rotella, F., *Découplage des systèmes linéaires*, Support de cours, ENIT, 2002.
- [28] Rotella, F., Systèmes linéaires non stationnaires, *Techniques de l'Ingénieur*, tome *Informatique Industrielle*, S-7035, Dunod, à paraître, 2002.
- [29] Rotella, F., Borne, P., *Théorie et pratique du calcul matriciel*, Technip, 1995.
- [30] Sandell, N.R. Jr, Athans, M., Linear quadratic gaussian multivariable control designs : robustness, vol. 4, pp. 2842–2846, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [31] Sobel, K.M., Shapiro, E.Y., Andry, A.N. Jr, Eigenstructure assignment, chap. 38, pp. 621–633, *The Control Handbook*, Levine, W.S., ed., CRC Press, 1996.
- [32] Walter, E., Pronzato, L., *Identification de modèles paramétrique*, Masson, 1994.
- [33] Willems, J.C., Pole assignment : the general problem, vol. 6, pp. 3727–3734, *Systems and control encyclopedia*, Singh, M.G., ed., Pergamon, 1987.
- [34] Wonham, W.M., *Linear multivariable control : a geometric approach*, Springer-Verlag, 1974.
- [35] Wolowich, W.A., *Linear multivariable systems*, Springer-Verlag, 1974.