

Systèmes linéaires à paramètres temporellement variables

FRÉDÉRIC ROTELLA
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

rotella@enit.fr

Table des matières

1	Introduction	3
2	Linéarisation autour d'une trajectoire	4
3	Quelques difficultés propres aux modèles non stationnaires	6
3.1	Résolution	6
3.2	Mise en série et non commutativité	6
3.3	Notion de pôles et zéros	7
3.3.1	Extension du cas stationnaire	7
3.3.2	Pôles et zéros en tant que signaux	8
4	Autre forme de l'équation différentielle	9
5	Équation d'état	12
5.1	Matrice fondamentale	12
5.2	Changement de variables	13
5.3	Commandabilité et observabilité	14
6	Construction de formes canoniques	16
6.1	Forme canonique commandable	16
6.2	Forme canonique observable	20
6.3	Cas mono-entrée ou mono-mesure	23
6.3.1	Forme canonique commandable	24
6.3.2	Forme canonique observable	25
7	Retour d'état	27
7.1	Placement de pôles et de structure	27
7.2	Placement de pôles en mono-entrée	28
7.3	Cas multi-entrées	31
7.4	Placement de structure	32
7.5	Retour d'état optimal	33
8	Observation	34
8.1	Construction d'observateurs pour $m = 1$	34
8.1.1	Observateur d'ordre plein	34
8.1.2	Observateur d'ordre réduit	35
8.2	Cas multi-mesures	36

9	Commande et régulation du moteur	38
10	Découplage	41
10.1	Découplage par retour statique	42
10.2	Découplage par extension dynamique	43
10.2.1	Initialisation	43
10.2.2	Etape d'extension	44
10.3	Découplage par platitude	47
10.3.1	Mise en évidence de la sortie plate	47
10.3.2	Découplage par retour statique	48
11	Annexe	49
	Références	50

1 Introduction

Considérer les modèles de systèmes dont les coefficients varient dans le temps revêt une importance non négligeable en pratique. En effet, lorsque par exemple la dérive d'un composant est connue au cours du fonctionnement, ou lorsque le principe de fonctionnement implique des coefficients à variations périodiques [14], ou bien lorsque l'on cherche à linéariser un processus non linéaire, non pas autour d'un point de fonctionnement, mais le long d'une trajectoire, un modèle linéaire mais à coefficients variables dans le temps peut être suffisant pour décrire correctement le comportement observé. Notons d'autre part que le principe du filtrage de Kalman a été établi en utilisant avec profit une équation d'état dont les paramètres dépendaient du temps [9, 10].

L'ensemble de ces modèles, dont les coefficients dépendent du temps, que l'on appelle également systèmes non stationnaires ou parfois instationnaires, permettent donc de représenter ou de décrire de nombreux comportements. Dans ce cas il est intéressant de pouvoir disposer de méthodes permettant d'appliquer des techniques utilisées habituellement sur les systèmes linéaires à coefficients constants [11]. Ce sont de telles méthodes que nous allons voir par la suite, mais auparavant, il y a lieu de passer par quelques considérations relatives à ce type de modèles.

Nous allons, dans un premier temps, considérer les systèmes linéaires à coefficients variables continus, c'est-à-dire décrits par une relation de convolution entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ (que nous prendrons de mêmes dimensions m) de la forme :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (1)$$

En dimension finie, ce qui restera le cadre de notre étude, ils sont décrits, en notant D l'opérateur de dérivation, soit :

$$D^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i},$$

par une équation différentielle entrée-sortie :

$$D^N y(t) + \sum_{i=0}^{N-1} A_i(t) D^i y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_i(t) D^i u(t), \quad (2)$$

où $A_i(t)$ et $B_i(t)$, pour $i = 1$ à N , sont des matrices ($m \times m$) dont les coefficients sont des fonctions du temps.

On peut également les décrire par une équation d'état $x(t)$ de dimension n :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \quad (3)$$

où $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des matrices dont les coefficients sont des fonctions du temps t , et ont pour dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$ et $(m \times n)$. Dans toute la suite, nous verrons que ces deux types de modèles sont équivalents et nous regarderons les méthodes permettant de passer de l'un à l'autre. Le passage de (2) à (3) s'appelle la réalisation et celui de (3) à (2) conduit à l'élimination des variables internes regroupées dans le vecteur état $x(t)$. Dans une autre étape, construire des formes canoniques de l'équation d'état nous permettra d'étendre au cas non stationnaire la commande par retour d'état et l'observation.

D'autre part, nous supposons que toutes les fonctions du temps que nous serons appelés à dériver sont suffisamment dérivables et tous les résultats que nous obtiendrons seront donc valables "sous réserve de dérivabilité".

Dans une dernière partie, nous considérerons le cas très important des systèmes discrets, dont un cas particulier est constitué par les systèmes continus commandés par ordinateur. Comme les méthodes utilisées seront inspirées de celles utilisées dans le cas continu, nous pourrions étudier les méthodes adaptées à ces modèles très rapidement.

2 Linéarisation autour d'une trajectoire

La technique de linéarisation, très employée autour d'un point de fonctionnement, est la principale source de modèles à paramètres dépendant du temps lorsque l'on travaille autour d'une trajectoire. C'est cette technique que nous allons rappeler ici.

Considérons tout d'abord un processus décrit par les équations non linéaires :

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{x}(t), x(t), u(t)) &= 0, \\ \Psi(y(t), x(t), u(t)) &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

où $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ représentent respectivement les variables d'entrée, de sortie et les variables internes du processus, et $T_d(t) = (y_d(t), x_d(t), u_d(t))$ une trajectoire du système vérifiant les équations (4). Notons que nous considérons ici un modèle implicite beaucoup plus général que l'équation d'état habituelle mais nous allons voir que la linéarisation du système autour de cette trajectoire conduit à un système linéaire non stationnaire.

A partir des variables d'écart :

$$\begin{aligned}\delta u(t) &= u_d(t) - u(t), \\ \delta y(t) &= y_d(t) - y(t), \\ \delta x(t) &= x_d(t) - x(t),\end{aligned}$$

un développement limité au premier ordre de (4) conduit aux équations linéarisées :

$$\begin{aligned}\underbrace{\Phi(\dot{x}(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Phi(\dot{x}_d(t), x_d(t), u_d(t))}_0 + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)} \dot{\delta x}(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)} \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)} \delta u(t), \\ \underbrace{\Psi(y(t), x(t), u(t))}_0 &= \underbrace{\Psi(y_d(t), x_d(t), u_d(t))}_0 + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)} \delta y(t) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)} \delta x(t) + \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)} \delta u(t).\end{aligned}$$

Sur tout intervalle $[t_0, t_F]$ où $\left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}$ et $\left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}$ sont régulières on obtient le modèle linéarisé sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}(t) &= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t), \\ \delta y(t) &= C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t).\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}A(t) &= - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)}, B(t) = - \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)}, \\ C(t) &= - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu} \right]_{T_d(t)}, D(t) = - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda} \right]_{T_d(t)}^{-1} \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu} \right]_{T_d(t)}.\end{aligned}$$

Pour se ramener à une équation d'état de la forme (3), il suffit d'utiliser la nouvelle sortie $\delta y(t) - D(t)\delta u(t)$. On aurait pu également partir d'un modèle différentiel entrée-sortie non linéaire de la forme :

$$\Xi(y(t), \dots, y^{(N)}(t), u(t), \dots, u^{(M)}(t)) = 0.\tag{5}$$

En notant $\tau_d(t) = (y_d(t), u_d(t))$ une trajectoire du système vérifiant les équations (5) et les matrices suivantes :

$$\Xi_i^y(t) = \left[\frac{\partial \Xi(\cdot)}{\partial y^{(i)}(t)} \right]_{\tau_d(t)} \quad \text{et} \quad \Xi_i^u(t) = \left[\frac{\partial \Xi(\cdot)}{\partial u^{(i)}(t)} \right]_{\tau_d(t)},$$

la technique de linéarisation précédente conduit, par un développement limité au premier ordre de Ξ autour de $\tau_d(t)$ à la relation :

$$\sum_{i=0}^N \Xi_i^y(t) \delta y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^M \Xi_i^u(t) \delta u^{(i)}(t) = 0.$$

Lorsque la matrice $\Xi_N^y(t)$ est inversible, il suffit de poser $M = N - 1$ et :

$$A_i(t) = [\Xi_N^y(t)]^{-1} \Xi_i^y(t) \text{ et } B_i(t) = -[\Xi_N^u(t)]^{-1} \Xi_i^u(t),$$

pour se ramener à l'équation différentielle initiale (2).

Exemple 1 [Pendule actionné]

Considérons le cas du pendule pesant, c'est-à-dire un pendule simple de moment d'inertie I , de masse M et de longueur L , dont l'entrée est le couple sur l'articulation, $\Gamma(t)$, et la sortie est l'angle par rapport à la verticale, $\theta(t)$. L'équation fondamentale de la dynamique donnant le modèle non linéaire :

$$I\ddot{\theta}(t) + MgL \sin \theta(t) = \Gamma(t), \quad (6)$$

on obtient une équation d'état en introduisant la variable $x(t) = \dot{\theta}(t)$, ce qui conduit aux relations :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= x(t), \\ I\dot{x}(t) + MgL \sin \theta(t) &= \Gamma(t). \end{aligned}$$

La position d'équilibre statique $(\theta_e, \Gamma_e, x_e)$ étant définie par $MgL \sin \theta_e = \Gamma_e$ et $x_e = 0$, si l'on considère les variables d'écart $\delta\Gamma(t) = \Gamma(t) - \Gamma_e$, $\delta\theta = \theta(t) - \theta_e$ et $\delta x(t) = x(t)$, l'application de la technique de linéarisation conduit au système linéarisé :

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}(t) &= \delta x(t), \\ I(\delta\dot{x}(t)) + MgL(\cos \theta_e)\delta\theta(t) &= \delta\Gamma(t). \end{aligned}$$

ayant comme entrée $\delta\Gamma(t)$ et comme sortie $\delta\theta(t)$ qui sont des variations autour du point de fonctionnement. On a ainsi obtenu le modèle linéaire d'état $X(t) = \begin{bmatrix} \delta\theta(t) & \delta x(t) \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL(\cos \theta_e)}{I} & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \delta\Gamma(t), \\ \delta\theta(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t). \end{aligned}$$

Si l'on considère maintenant une trajectoire exécutable $(\theta_d(t), \Gamma_d(t), x_d(t))$, c'est-à-dire qui vérifie les relations :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_d(t) &= x_d(t), \\ I\dot{x}_d(t) + MgL \sin \theta_d(t) &= \Gamma_d(t), \end{aligned}$$

alors le même raisonnement conduit, en considérant le même état $X(t)$, au modèle non stationnaire :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL(\cos \theta_d(t))}{I} & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \delta\Gamma(t), \\ \delta\theta(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t). \end{aligned}$$

On aurait pu partir directement de la relation (6) ce qui donne le modèle linéarisé entrée-sortie :

$$I\delta\ddot{\theta}(t) + MgL \cos \theta_d(t)\delta\theta(t) = \delta\Gamma(t),$$

et il est facile de se rendre compte qu'une réalisation de cette relation est l'équation d'état qui la précède. $\nabla\nabla\nabla$

3 Quelques difficultés propres aux modèles non stationnaires

3.1 Résolution

Si on considère (3) pour $n = 1$ et $m = 1$, soit $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t)$, on la résout à l'aide de l'équation différentielle en régime libre, $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$, dont la solution telle que $x(t_0) = x_0$ s'écrit :

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right) x_0.$$

La méthode de variation de la constante, *i.e.* celle qui consiste à remplacer x_0 par une fonction du temps qui coïncide avec x_0 en t_0 , conduit à la solution de (3) pour $n = 1$ sous la forme :

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a(\lambda)d\lambda\right) b(\tau)u(\tau)d\tau.$$

La première difficulté vient du fait que l'on ne peut pas, sauf cas particulier étendre cette relation pour $n > 1$. De façon plus précise, on ne peut pas écrire dans le cas général, la solution de (3) pour $u(t) \equiv 0$ sous la forme :

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau\right) x_0.$$

Ainsi, en ce qui concerne l'étude de la stabilité, on peut toujours conclure à la stabilité asymptotique du système de dimension 1 lorsque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau = -\infty,$$

mais cela ne peut être étendu au cas d'une dimension supérieure.

3.2 Mise en série et non commutativité

Exemple 2 Considérons deux systèmes du premier ordre, d'entrées scalaires $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et de sorties scalaires $y_1(t)$ et $y_2(t)$, définies par :

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) & : \quad \dot{y}_1(t) + a_1(t)y_1(t) = b_1(t)u_1(t), \\ (\Sigma_2) & : \quad \dot{y}_2(t) + a_2(t)y_2(t) = b_2(t)u_2(t). \end{aligned}$$

La mise en série (Σ_1) avec (Σ_2) , c'est-à-dire en posant $u_2(t) = y_1(t)$, $y(t) = y_2(t)$ et $u(t) = u_1(t)$, conduit à l'équation différentielle entrée-sortie :

$$\ddot{y} + (a_1 + a_2 - \frac{\dot{b}_2}{b_2})\dot{y} + (a_1a_2 + \dot{a}_2 - \frac{\dot{b}_2}{b_2}a_2)y = b_1b_2u.$$

Par contre, la mise en série (Σ_2) avec (Σ_1) , en posant $u_1(t) = y_2(t)$, $y(t) = y_1(t)$ et $u(t) = u_2(t)$, conduit à l'équation différentielle entrée-sortie :

$$\ddot{y} + (a_1 + a_2 - \frac{\dot{b}_1}{b_1})\dot{y} + (a_1a_2 + \dot{a}_1 - \frac{\dot{b}_1}{b_1}a_1)y = b_1b_2u.$$

Ces deux équations différentielles ne coïncident que dans le cas particulier où $\frac{b_1}{b_2}$ est une constante et

$$a_1 - a_2 = \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(\tau)d\tau\right) c,$$

où c est une constante et $\alpha = \frac{\dot{b}_1}{b_1}$.

▽▽▽

On en déduit aisément que, de façon générale, deux modèles non stationnaires dont les paramètres varient dans le temps ne peuvent commuter. Il y a donc lieu d'être extrêmement circonspect pour concevoir la régulation de ce type de systèmes.

3.3 Notion de pôles et zéros

Malgré ce que nous venons de voir, on pourrait penser qu'une forme faisant apparaître des pôles et des zéros, ordonnés, de l'équation différentielle (2) permettrait une interprétation similaire au cas des systèmes à paramètres invariants. Nous allons en effet nous apercevoir que la simple transposition de ces notions n'est pas possible et qu'il est nécessaire de prendre une autre interprétation des pôles et des zéros d'un système.

3.3.1 Extension du cas stationnaire

La forme, que l'on pourrait appeler forme pôles-zéros, s'écrirait :

$$(D - p_n(t)) \cdots (D - p_1(t))y(t) = k(t)(D - z_{n-1}(t)) \cdots (D - z_1(t))u(t), \quad (7)$$

ce qui permettrait de définir les fonctions temporelles pôles $p_i(t)$ et les fonctions temporelles zéros $z_i(t)$.
Plaçons-nous dans les situations suivantes :

– pour une entrée identiquement nulle, la sortie est régie par l'équation différentielle :

$$(D - p_n(t)) \cdots (D - p_1(t))y(t) = 0.$$

En introduisant les variables intermédiaires :

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= y(t), \\ \lambda_2(t) &= (D - p_1(t))y(t), \\ \lambda_3(t) &= (D - p_2(t))\lambda_2(t), \\ &\vdots \\ \lambda_n(t) &= (D - p_{n-1}(t))\lambda_{n-1}(t), \end{aligned}$$

on obtient les équations différentielles :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= p_1(t)\lambda_1(t) + \lambda_2(t), \\ \dot{\lambda}_2(t) &= p_2(t)\lambda_2(t) + \lambda_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{\lambda}_{n-1}(t) &= p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t) + \lambda_n(t), \\ \dot{\lambda}_n(t) &= p_n(t)\lambda_n(t). \end{aligned}$$

Cet ensemble de relations se résout sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= e^{\int_{t_0}^t p_n(\tau) d\tau} \lambda_n(t_0), \\ \lambda_{n-1}(t) &= e^{\int_{t_0}^t p_{n-1}(\tau) d\tau} \lambda_{n-1}(t_0) + \chi_{n-1}(p_{n-1}(t), \lambda_n(t)), \\ &\vdots \\ \lambda_1(t) &= e^{\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau} \lambda_1(t_0) + \chi_1(p_1(t), \lambda_2(t)), \end{aligned}$$

qui met en évidence l'importance des exponentielles de $\int_{t_0}^t p_i(\tau) d\tau$ dans l'évolution en régime libre. D'où l'interprétation possible en termes de pôles ;

- pour une sortie identiquement nulle, et en supposant que $k(t)$ ne s'annule qu'en des valeurs temporelles isolées, l'entrée est contrainte par l'équation différentielle :

$$(D - z_{n-1}(t)) \cdots (D - z_1(t))u(t) = 0.$$

De même que précédemment, si on introduit les variables :

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= u(t), \\ \mu_2(t) &= (D - z_1(t))\mu_1(t), \\ \mu_3(t) &= (D - z_2(t))\mu_2(t), \\ &\vdots \\ \mu_n(t) &= (D - z_{n-1}(t))\mu_{n-1}(t), \end{aligned}$$

et qu'elle vérifient, pour un i dans $\{1, \dots, n-1\}$, $(D - z_i(t))\mu_i(t) = 0$, alors la sortie reste identiquement nulle. D'où l'interprétation en termes de zéros du système.

Cependant nous allons voir que ces interprétations ne peuvent donner lieu à des conclusions pertinentes vis-à-vis de la structure du système. En effet, pour relier (7) à (2) il suffit de développer la forme pôles-zéros. Le développement de cette expression étant relativement lourd dans un cadre général, prenons par exemple $n = 3$. En développant les dérivations de (7), on arrive à :

$$\begin{aligned} (D - p_3)(D - p_2)(D - p_1)y &= (D - p_3)(D - p_2)(\dot{y} - p_1y), \\ &= (D - p_3)(\ddot{y} - (p_1 + p_2)\dot{y} + (p_1p_2 - \dot{p}_1)y), \\ &= \ddot{y} - (p_1 + p_2 + p_3)\dot{y} + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2\dot{p}_1 - p_2)\dot{y} \\ &\quad + (p_1\dot{p}_2 + \dot{p}_1p_2 + \dot{p}_1p_3 - \ddot{p}_1 - p_1p_2p_3)y, \\ (D - z_2)(D - z_1)u &= \ddot{u} - (z_1 + z_2)\dot{u} + (z_1z_2 - \dot{z}_1)u. \end{aligned}$$

La comparaison avec (2) conduit au système d'équations algèbro-différentielles :

$$\begin{aligned} a_0 &= p_1\dot{p}_2 + (\dot{p}_1 - p_1p_3)p_2 + \dot{p}_1p_3 - \ddot{p}_1, \\ a_1 &= p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2\dot{p}_1 - p_2, \\ a_2 &= -(p_1 + p_2 + p_3), \\ b_0 &= k(z_1z_2 - \dot{z}_1), \\ b_1 &= -k(z_1 + z_2), \\ b_2 &= k. \end{aligned}$$

On voit donc que si l'on peut toujours passer d'une équation formulée comme (7) à la formulation (2), le contraire est beaucoup moins évident pour deux raisons essentielles : d'une part ces équations n'ont pas de solution faciles à exprimer, on obtient en effet des équations différentielles non linéaires, et d'autre part les $p_i(t)$ et $z_i(t)$ ne seront connus qu'à des constantes près. Cela remet cause toute analyse basée sur la détermination de ces quantités, comme par exemple la stabilité, ou l'interprétation en termes de pôles et zéros d'un système.

3.3.2 Pôles et zéros en tant que signaux

De façon à simplifier notre étude plaçons nous comme précédemment dans le cas où $m = 1$, et un système défini par l'équation différentielle scalaire :

$$D^n y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(t) D^i u(t),$$

où les $a_i(t)$ et les $b_i(t)$ sont des fonctions du temps. Il est alors de définir les n pôles de ce système comme les n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle :

$$D^n y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y(t) = 0,$$

et les $n - 1$ zéros comme les $n - 1$ solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i(t) D^i u(t) = 0.$$

Cette définition ne souffre d'aucune ambiguïté et s'accorde, dans le cas linéaire, avec d'autres interprétations plus algébriques en termes de modules ([2, 3]). D'autre part l'interprétation en termes d'énergie libérée (pour les pôles) ou d'énergie absorbée (pour les zéros) par un système reçoit toute sa dimension ici. L'inconvénient majeur étant qu'il est souvent impossible, sauf cas particulier, de déterminer explicitement ces pôles et ces zéros.

Nous allons voir cependant que certaines méthodes peuvent être employées pour concevoir un algorithme de commande permettant de contrôler au mieux des systèmes régis par des modèles dont les paramètres varient en fonction du temps.

4 Autre forme de l'équation différentielle

Introduisons la matrice opérationnelle :

$$F_N^{\otimes m}(D) = F_N(D) \otimes I_m,$$

où \otimes représente le produit tensoriel de deux matrices ($A \otimes B = [a_{ij}B]$), I_m la matrice identité d'ordre m et $F_N(D)$ la matrice $(N \times N)$ opérationnelle :

$$F_N(D) = \left[F_{ij}(D) = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} D^{j-i} & \text{pour } 1 \leq i \leq j \leq N, \\ 0 & \text{pour } 1 \leq j < i \leq N, \end{cases} \right],$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & D & D^2 & \dots & D^{N-3} & D^{N-2} & D^{N-1} \\ 0 & 1 & 2D & \dots & \dots & (N-2)D^{N-3} & (N-1)D^{N-2} \\ & & 1 & 3D & \dots & \binom{N-2}{2}D^{N-4} & \binom{N-1}{2}D^{N-3} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & (N-2)D & \binom{N-1}{2}D^2 \\ & & & & & 1 & (N-1)D \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on considère l'équation différentielle :

$$D^N y(t) + \sum_{i=0}^{N-1} D^i [\alpha_i(t)y(t)] = \sum_{i=0}^{N-1} D^i [\beta_i(t)u(t)], \quad (8)$$

où les matrices $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ ont pour dimensions $(m \times m)$ et dont les coefficients sont des fonctions du temps t , on a le résultat suivant :

Théorème 1 Les équations différentielles (2) et (8) sont équivalentes et on a, entre les matrices :

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_0(t) \\ A_1(t) \\ \vdots \\ A_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t) \\ \vdots \\ B_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{N-1}(t) \end{bmatrix}.$$

la relation suivante :

$$A(t) = F_N^{\otimes m}(D)\alpha(t), \quad B(t) = F_N^{\otimes m}(D)\beta(t),$$

Pour s'en convaincre, il suffit de développer les expressions $D^i [\alpha_i(t)y(t)]$ et $D^i [\beta_i(t)u(t)]$, ce qui donne, pour $i = 0, \dots, n-1$, et en notant $\binom{i}{j} = \binom{i}{i-j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$:

$$D^i [\alpha_i(t)y(t)] = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} [\alpha_i(t)] D^j [y(t)],$$

$$D^i [\beta_i(t)u(t)] = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} [\beta_i(t)] D^j [u(t)].$$

On obtient ainsi, à partir de (8) :

$$D^N y(t) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} [\alpha_i(t)] D^j [y(t)] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} [\beta_i(t)] D^j [u(t)],$$

soit :

$$D^N y(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=j}^{N-1} \binom{i}{j} D^{i-j} [\alpha_i(t)] \right\} D^j [y(t)] = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=j}^{N-1} \binom{i}{j} D^{i-j} [\beta_i(t)] \right\} D^j [u(t)].$$

En identifiant cette relation avec (2), on obtient les relations, pour $j = 0, \dots, N-1$:

$$A_j(t) = \sum_{i=j}^{N-1} \binom{i}{j} D^{i-j} [\alpha_i(t)], \quad B_j(t) = \sum_{i=j}^{N-1} \binom{i}{j} D^{i-j} [\beta_i(t)].$$

L'équivalence découle de la régularité de $F_N^{\otimes m}(D)$ dont l'inverse, par le résultat $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$:

$$[F_N^{\otimes m}(D)]^{-1} = [F_N(D)]^{-1} \otimes I_m,$$

où $[F_N(D)]^{-1}$ a pour expression, démontrée en annexe :

$$[F_N(D)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -D & D^2 & \dots & (-1)^{N-2} D^{N-3} & (-1)^{N-1} D^{N-2} & (-1)^N D^{N-1} \\ 0 & 1 & -2D & \dots & \dots & (-1)^{N-2} (N-2) D^{N-3} & (-1)^{N-1} (N-1) D^{N-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3D & \dots & (-1)^{N-3} \binom{n-2}{2} D^{n-4} & (-1)^{N-2} \binom{N-1}{2} D^{N-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -(N-2)D & \binom{N-1}{2} D^2 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & -(N-1)D \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a bien sûr $\alpha(t) = [F_N^{\otimes m}(D)]^{-1} A(t)$ et $\beta(t) = [F_N^{\otimes m}(D)]^{-1} B(t)$, ce qui clos la démonstration.

Exemple 3 [Moteur à flux variable]

Considérons un moteur à courant continu à excitation séparée dont le flux statorique varie au cours du temps. Ce moteur peut être décrit par les relations suivantes :

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t) - K_e \Phi(t) \Omega(t),$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = K_m \Phi(t) I(t),$$

où $\Phi(t)$ est le flux induit par le stator, $I(t)$ et $V(t)$ sont respectivement le courant et la tension rotoriques (cette dernière variable sera notre variable de commande), et $\Omega(t)$, vitesse de rotation du rotor, sera notre variable de sortie. Le flux $\Phi(t)$, dépendant du circuit statorique et de son alimentation, est considéré comme variable en fonction du temps, ce qui place ce modèle dans le cadre des systèmes à paramètres temporellement variables.

Une première équation différentielle peut être obtenue en éliminant le courant $I(t)$, ce qui donne :

$$\ddot{\Omega}(t) + a_1(t)\dot{\Omega}(t) + a_0(t)\Omega(t) = b(t)V(t),$$

avec :

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \frac{K_m K_e}{JL} \Phi(t)^2 - \frac{f\dot{\Phi}(t)}{J\Phi(t)} + \frac{Rf}{LJ}, \\ a_1(t) &= \frac{f}{J} + \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)}, \\ b(t) &= \frac{K_m \Phi(t)}{JL}. \end{aligned}$$

Comme ici $m = 1$ et $N = 2$, en utilisant les matrices :

$$F(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{D} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } F^{-1}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{D} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

on obtient la deuxième forme de l'équation différentielle entrée-sortie :

$$\ddot{\Omega}(t) + \frac{d}{dt} [\alpha_1(t)\Omega(t)] + \alpha_0(t)\Omega(t) = \beta(t)V(t), \quad (9)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{K_m K_e}{JL} \Phi(t)^2 - \frac{f\dot{\Phi}(t)}{J\Phi(t)} + \frac{Rf}{LJ} + \frac{\ddot{\Phi}(t)\Phi(t) - \dot{\Phi}(t)^2}{\Phi(t)^2}, \\ \alpha_1(t) &= a_1(t) = \frac{f}{J} + \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)}, \\ \beta(t) &= \frac{K_m \Phi(t)}{JL}. \end{aligned}$$

▽▽▽

L'intérêt de considérer cette deuxième forme (8) de l'équation différentielle réside dans le fait que l'on peut en proposer une réalisation simple sous la forme d'une équation d'état (3) par l'application d'une technique utilisée dans le cas des systèmes stationnaires. En effet, si on l'écrit sous la forme intégrale :

$$y(t) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{I}^{N-i} [\alpha_i(t)y(t)] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{I}^{N-i} [\beta_i(t)u(t)],$$

où \mathbf{I} représente l'opérateur d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{I}^{N-i} [\beta_i(t)u(t) - \alpha_i(t)y(t)], \\ &= \mathbf{I} [\beta_{N-1}(t)u(t) - \alpha_{N-1}(t)y(t)] + \mathbf{I} [\beta_{N-2}(t)u(t) - \alpha_{N-2}(t)y(t)] + \mathbf{I} [\dots + \mathbf{I} [\beta_0(t)u(t) - \alpha_0(t)y(t)] \dots]. \end{aligned}$$

En posant $x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \cdots \ x_N^T(t)]^T$:

$$\begin{aligned} x_N(t) &= y(t), \\ x_1(t) &= I[\beta_0(t)u(t) - \alpha_0(t)y(t)], \\ x_2(t) &= I[\beta_1(t)u(t) - \alpha_1(t)y(t) + x_1(t)], \\ &\vdots \\ x_{N-1}(t) &= I[\beta_{N-2}(t)u(t) - \alpha_{N-2}(t)y(t) + x_{N-2}(t)], \end{aligned}$$

on obtient la réalisation :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0(t) \\ I_m & \ddots & & \vdots & -\alpha_1(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{N-2}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & I_m & -\alpha_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{N-2}(t) \\ \beta_{N-1}(t) \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [0 \ \cdots \ 0 \ I_m] x(t). \end{aligned}$$

Exemple 4 [Moteur (suite)] A partir de la deuxième forme différentielle on obtient la réalisation sous la forme de l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \beta(t) \\ 0 \end{bmatrix} V(t), \\ \Omega(t) &= [0 \ 1] X(t). \end{aligned}$$

▽▽▽

5 Équation d'état

Une autre forme de description d'un système à paramètres temporellement variables est constitué par l'équation d'état (3) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned}$$

dont nous venons de voir un exemple particulier lors de la réalisation de l'équation différentielle (8). L'avantage de ce formalisme est qu'il permet de d'étendre facilement les méthodes utilisées dans le cas des systèmes mono-entrées mono-sorties et les méthodes utilisées dans les cadre des systèmes stationnaires au cas des systèmes multi-entrées multi-sorties non stationnaires. De plus, nous allons voir qu'il permet de répondre à tous les problèmes que nous avons soulevés relativement à la manipulation de ces systèmes.

5.1 Matrice fondamentale

De façon générale, la théorie des équations différentielles [17] nous indique qu'il existe une matrice unique $\Phi(t, \tau)$, appelée, suivant les auteurs, matrice fondamentale, de transition ou de monodromie, telle que l'équation différentielle homogène :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

admette pour solution unique :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Notons que cette matrice est en général non connue analytiquement mais peut être approchée numériquement [6]. Dans le cas où A est une matrice constante, on a $\Phi(t, \tau) = \exp[A(t - \tau)]$.

Cette matrice de transition possède les propriétés suivantes, $\forall t, \tau, \eta$:

$$\Phi(t, t) = I, \quad [\Phi(t, \tau)]^{-1} = \Phi(\tau, t), \quad \Phi(t, \tau) = \Phi(t, \eta)\Phi(\eta, \tau),$$

et elle permet de calculer la solution de (3), avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$, sous la forme :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad y(t) = C(t)x(t).$$

Dans le cas où $x_0 = 0$, on reconnaît la relation de convolution (1) où les propriétés de $h(t, \tau) = \Phi(t, \tau)B(\tau)$ sont ici mises en évidence.

5.2 Changement de variables

Considérons maintenant le changement de variable :

$$z(t) = P(t)x(t), \tag{10}$$

où $P(t)$ est une matrice régulière pour tout t . Par matrice régulière nous entendons ici que sur l'intervalle de temps considéré, $P(t)$ et son inverse $P^{-1}(t)$ sont entièrement définies.

Alors, dans ces conditions, ce changement de variable transforme l'équation d'état (3) en :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)u(t), \\ y(t) &= \bar{C}(t)z(t), \end{aligned} \tag{11}$$

avec :

$$\bar{A}(t) = [PA + \dot{P}]P^{-1}, \quad \bar{B}(t) = PB, \quad \bar{C}(t) = CP^{-1}.$$

Notons que pour que les représentations (3) et (11) soient équivalentes il faut $P^{-1}(t)$ existe et que cette matrice soit inversible. Ainsi la condition à observer ici est :

$$\forall t \in T, \quad 0 < \det P(t) < \infty,$$

où T est le domaine du temps considéré.

Nous avons vu que la notion de pôle d'un système non stationnaire perdait son sens habituel et l'on peut alors se poser la question du placement de pôles par retour d'état pour ce type de systèmes. Dans le cas où il existe une matrice de changement de variable (10) telle que $\bar{A}(t)$ soit une matrice constante \bar{A} , lors l'équation d'état (11) admet pour matrice fondamentale :

$$\Phi(t, \tau) = \exp[\bar{A}(t - \tau)],$$

qui donne la solution :

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp[\bar{A}(t - t_0)]z_0 + \exp[\bar{A}t] \int_{t_0}^t \exp[-\bar{A}\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau, \\ x(t) &= P^{-1}(t)z(t). \end{aligned}$$

Comme $P^{-1}(t)$ est bornée, les pôles du système (3) sont ceux de (11) et placer les pôles du système initial consiste à transformer, par retour d'état et changement de variable, ce système en un système dont la matrice $\bar{A}(t)$ est à coefficients constants et dont les valeurs propres seront considérés comme pôles du système. Une changement de variable qui transforme un système non stationnaire en un système à coefficients constants est appelé transformation de Lyapounov ([6]) et n'est pas facilement calculable dans le cas général. Par contre, nous verrons qu'un retour d'état conduit très facilement à cette transformation. Ce principe a d'ailleurs été utilisé dans le contexte des systèmes non linéaires et a conduit aux techniques de linéarisation par bouclage et difféomorphisme ([7]).

5.3 Commandabilité et observabilité

Lorsque l'on utilise une équation d'état, la première question que l'on doit se poser concerne sa minimalité, c'est-à-dire le fait qu'il soit commandable et observable [8]. La propriété de commandabilité est celle qui, à partir de la première relation de l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

permet d'étudier comment la commande $u(t)$ influence l'état $x(t)$. La propriété d'observabilité est celle qui à partir des relations :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ y(t) &= C(t)x(t).\end{aligned}$$

permet d'étudier si la sortie (ou plutôt les mesures) reflètent l'état. Si ces propriétés ne sont pas satisfaites, il convient de s'assurer que les parties non commandables ou non observables soient asymptotiquement stables, on dit alors que le système est stabilisable (pour la commandabilité) ou détectable (pour l'observabilité). Si le modèle n'est pas stabilisable ou n'est pas détectable, il sera alors impossible d'en envisager la commande. Il y a dans ce cas un défaut de structure qui génère une instabilité interne qui ne peut être maîtrisée. Dans le cas contraire, les parties non commandables ou non observables possédant des régimes transitoires qui tendent à s'annuler, la commande va être réalisée sur un modèle d'état plus simple où ces parties sont éliminées. Ce dernier modèle étant, par construction, commandable et observable, c'est-à-dire minimal, sera celui utilisé pour concevoir la commande.

Nous allons rappeler ici les critères de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes non stationnaires donnés par Silverman et Meadows [22]. Ces critères se présentent comme des extensions des critères de Kalman pour les systèmes stationnaires [8], cependant nous aurons besoin d'utiliser des opérateurs différentiels sur matrices non stationnaires que nous noterons :

$$\begin{aligned}K(M(t)) &= A(t)M(t) - \dot{M}(t), \\ L(N(t)) &= N(t)A(t) + \dot{N}(t),\end{aligned}$$

et que l'on utilisera de façon itérée. De façon à simplifier les notations nous utiliserons donc les conventions suivantes, $K^0(M(t)) = M(t)$, $L^0(N(t)) = N(t)$, et pour tout $i > 0$:

$$\begin{aligned}K^{i+1}(M(t)) &= A(t)K^i(M(t)) - \dot{K}^i(M(t)) = (A(t) - D)K^i(M(t)), \\ L^{i+1}(N(t)) &= L^i(N(t))A(t) + \dot{L}^i(N(t)) = L^i(N(t))(A(t) + D),\end{aligned}$$

où D est l'opérateur de dérivation.

Test de commandabilité On construit la suite de matrices $K^i(B(t))$, pour $i = 0, 1, \dots$. Si il existe un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$ et un entier μ tel que la matrice :

$$K_{\{\mu\}}(t) = \begin{bmatrix} K^0(B(t)) & K^1(B(t)) & \dots & K^{\mu-1}(B(t)) \end{bmatrix},$$

soit de rang n sur tout T alors le système est commandable sur T . Dans ces conditions $K_{\{\mu\}}(t)$ est appelée la matrice de commandabilité de la paire $(A(t), B(t))$.

Test d'observabilité On construit la suite de matrices $L^i(C(t))$, pour $i = 0, 1, \dots$. Si il existe un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$ et un entier ν tel que la matrice :

$$L_{\{\nu\}}(t) = \begin{bmatrix} L^0(C(t)) \\ L^1(C(t)) \\ \vdots \\ L^{\nu-1}(C(t)) \end{bmatrix},$$

soit de rang n sur tout T alors le système est observable sur T . Dans ces conditions $L_{\{\nu\}}(t)$ est appelée la matrice d'observabilité de la paire $(A(t), C(t))$.

On peut remarquer que contrairement au cas stationnaire ou au cas à une entrée ou une mesure, les indices μ et ν ne sont pas limités à $n - 1$ car on ne peut invoquer le théorème de Cayley-Hamilton pour éliminer tous les vecteurs de $K^n(B(t))$ ou $L^n(C(t))$ et des matrices suivantes [4].

Lorsque l'on réalise un changement de variable tel que (10), on obtient d'autres matrices de commandabilité et d'observabilité relatives à la nouvelle forme de l'équation d'état (11). Si on désigne par $\bar{K}_{\{\mu\}}(t)$ et $\bar{L}_{\{\nu\}}(t)$ les nouvelles matrices obtenues :

$$\bar{K}_{\{\mu\}}(t) = [K^0(\bar{B}(t)) \quad K^1(\bar{B}(t)) \quad \dots \quad K^{\mu-1}(\bar{B}(t))], \quad \bar{L}_{\{\nu\}}(t) = \begin{bmatrix} L^0(\bar{C}(t)) \\ L^1(\bar{C}(t)) \\ \vdots \\ L^{\nu-1}(\bar{C}(t)) \end{bmatrix},$$

on a les relations suivantes, pour tout entiers μ et ν :

$$\bar{K}_{\{\mu\}}(t) = P(t)K_{\{\mu\}}(t), \quad \text{et} \quad \bar{L}_{\{\nu\}}(t) = L_{\{\nu\}}(t)P(t)^{-1}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire que $\bar{B} = PB$ et que si, par hypothèse de récurrence, $K^{i-1}(\bar{B}(t)) = P(t)K^{i-1}(B(t))$, alors :

$$\begin{aligned} K^i(\bar{B}(t)) &= (\bar{A} - D)K^{i-1}(\bar{B}(t)), \\ &= \left[PA + \dot{P} \right] P^{-1} - D)PK^{i-1}(B(t)), \\ &= PAK^{i-1}(B(t)) + \dot{P}K^{i-1}(B(t)) - \dot{P}K^{i-1}(B(t)) - P\dot{K}^{i-1}(B(t)), \\ &= P(A - D)K^{i-1}(B(t)) = PK^i(B(t)), \end{aligned}$$

et le même raisonnement peut être mené sur les matrices $L^i(\bar{C}(t))$.

Dans le cas mono-entrée ou mono-mesure, c'est-à-dire $m = 1$, lorsque le système est :

- commandable, alors les matrices $K_{\{n\}}(t)$ et $\bar{K}_{\{n\}}(t)$ sont inversibles et l'on a la relation permettant de déterminer le changement de variable entre deux réalisations commandables d'un système :

$$P(t) = \bar{K}_{\{n\}}(t)K_{\{n\}}^{-1}(t);$$

- observable, alors les matrices $L_{\{n\}}(t)$ et $\bar{L}_{\{n\}}(t)$ sont inversibles et l'on a la relation permettant de déterminer le changement de variable entre deux réalisations observables d'un système :

$$P(t) = \bar{L}_{\{n\}}^{-1}(t)L_{\{n\}}(t).$$

Exemple 5 [Moteur (suite)] Pour le moteur, nous avons obtenu, dans l'exemple 2, la réalisation sous la forme de l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \beta(t) \\ 0 \end{bmatrix} V_r(t), \\ \Omega(t) &= [0 \quad 1] X(t), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{K_m K_e}{JL} \Phi(t)^2 - \frac{f \dot{\Phi}(t)}{J \Phi(t)} + \frac{Rf}{LJ} + \frac{\ddot{\Phi}(t) \Phi(t) - \dot{\Phi}(t)^2}{\Phi(t)^2}, \\ \alpha_1(t) &= a_1(t) = \frac{f}{J} + \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)}, \\ \beta(t) &= \frac{K_m \Phi(t)}{JL}. \end{aligned}$$

Si on construit la matrice :

$$L_{\{2\}}(t) = \begin{bmatrix} L^0(C(t)) \\ L^1(C(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix},$$

on s'aperçoit que cette équation d'état est toujours observable. Par contre, si on construit :

$$K_{\{2\}}(t) = \begin{bmatrix} K^0(B(t)) & K^1(B(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(t) & -\dot{\beta}(t) \\ 0 & \beta(t) \end{bmatrix},$$

on en déduit que ce modèle est commandable si et seulement si le flux $\Phi(t)$ ne s'annule pas tout en restant borné, ce que nous supposerons dans les exemples suivants. ▽▽▽

6 Construction de formes canoniques

La construction de formes canoniques concerne le problème de la détermination d'équations d'état où les matrices ont le moins grand nombre de termes significatifs. Il en existe une infinité suivant les propriétés ou particularités que l'on veut utiliser. En ce qui nous concerne, nous allons construire seulement deux formes particulières, la forme canonique commandable et la forme canonique observable, qui nous seront particulièrement utiles pour la mise au point de commande des systèmes non stationnaires. D'autre part, nous allons distinguer également le cas général du cas particulier mono-entrée ou mono-mesure ou la détermination des formes canoniques peut se faire plus rapidement.

6.1 Forme canonique commandable

Notons :

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & \cdots & b_{m-1}(t) & b_m(t) \end{bmatrix},$$

et supposons que $\text{rang } B(t) = m$ sur T . Si cela n'était pas le cas il suffirait de réduire le nombre d'entrées. Lorsque le système est commandable, les étapes suivantes, détaillées dans [18], permettent de construire la forme canonique de commandabilité.

1. Dans la suite ordonnée de vecteurs :

$$\begin{aligned} & K^0(b_1(t)), K^0(b_2(t)), \dots, K^0(b_m(t)), K^1(b_1(t)), K^1(b_2(t)), \dots, K^1(b_m(t)), \dots \\ & \dots, K^2(b_1(t)), \dots, K^2(b_m(t)), \dots, K^i(b_1(t)), \dots, K^i(b_m(t)), \dots \end{aligned}$$

on sélectionne un vecteur s'il n'est pas linéairement dépendant des précédents.

2. On détermine alors les m indices de commandabilité μ_i , pour $i = 1, \dots, m$, comme le plus petit entier k tel que $K^k(b_i(t))$ soit linéairement dépendant des vecteurs précédents. On calcule les indices cumulés de commandabilité σ_i :

$$i = 1, \dots, m, \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^i \mu_j.$$

3. On réordonne les vecteurs sélectionnés au pas 1 pour construire la matrice :

$$V(t) = \begin{bmatrix} K^0(b_1(t)) & K^1(b_1(t)) & \cdots & K^{\mu_1-1}(b_1(t)) & K^0(b_2(t)) & K^1(b_2(t)) & \cdots \\ K^{\mu_2-1}(b_2(t)) & \cdots & K^0(b_m(t)) & K^1(b_m(t)) & \cdots & K^{\mu_m-1}(b_m(t)) \end{bmatrix}$$

4. On calcule $V^{-1}(t)$, qui est inversible sur T par construction, d'où l'on extrait les lignes $M_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, définies par

$$\text{pour } i = 1 \text{ à } m, \quad M_i(t) \text{ est la } \sigma_i - \text{ième ligne de } V^{-1}(t).$$

$$B_C(t) = P_C(t)B(t) = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times & \begin{matrix} \uparrow \\ \mu_1 \\ \downarrow \end{matrix} \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times & \begin{matrix} \uparrow \\ \mu_2 \\ \downarrow \end{matrix} \\ & & \vdots & & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \begin{matrix} \mu_m \\ \downarrow \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad C_C(t) = C(t)P_C^{-1}(t).$$

On peut remarquer qu'en notant $a_i(t)$ la σ_i -ième ligne de $A_C(t)$, elle est donnée également par la relation :

$$a_i(t) = L^{\mu_i}(M_i(t))P_C^{-1}(t).$$

7. Par le changement de variables de commande :

$$u_C(t) = H_C(t)u(t),$$

où $H_C(t)$ est la matrice ($m \times m$) formée des lignes significatives de $B_C(t)$:

$$H_C = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

on arrive finalement à l'équation d'état canonique commandable :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= A_C(t)x_C + \bar{B}_C u_C, \\ y &= C_C(t)x_C, \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{B}_C = B_C(t)H_C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \begin{matrix} \uparrow \\ \mu_1 \\ \downarrow \end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \begin{matrix} \uparrow \\ \mu_2 \\ \downarrow \end{matrix} \\ & & \vdots & & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \begin{matrix} \mu_m \\ \downarrow \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Exemple 6 [Moteur (suite)]

A partir des équations de fonctionnement du moteur que nous avons déjà rencontrées dans l'exemple 2 :

$$\begin{aligned} L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= V(t) - K_e \Phi(t)\Omega(t), \\ J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) &= K_m \Phi(t)I(t), \end{aligned}$$

on peut construire, en prenant comme état $x(t) = [I(t) \quad \Omega(t)]^T$ l'équation d'état (3) avec :

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e \Phi(t)}{L} \\ \frac{K_m \Phi(t)}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C(t) = [0 \quad 1]. \quad (14)$$

Les matrices de commandabilité et d'observabilité s'écrivant respectivement :

$$K_{\{2\}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \\ 0 & \frac{K_m \Phi(t)}{JL} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L_{\{2\}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_m \Phi(t)}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix},$$

ce modèle sera commandable et observable dans tout intervalle où le flux n'est pas nul tout en restant borné, ce que nous supposons. Nous allons ici utiliser l'algorithme précédent pour construire la forme canonique commandable de ce système.

L'utilisation de l'algorithme décrit pour le cas multi-entrées se déroule de la façon suivante. Comme $V(t) = K_{\{2\}}(t)$, il vient :

$$V^{-1}(t) = \frac{JL}{K_m \Phi(t)} \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{J} & \frac{R}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et on en déduit $M_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{JL}{K_m \Phi(t)} \end{bmatrix}$ et :

$$L^0(M_1(t)) = M_1(t) \quad \text{et} \quad L^1(M_1(t)) = \begin{bmatrix} L & -\frac{L}{K_m} \left(\frac{f}{\Phi(t)} + \frac{J\dot{\Phi}(t)}{\Phi^2(t)} \right) \end{bmatrix}.$$

Cela conduit à la matrice de changement de variables :

$$P_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{JL}{K_m \Phi(t)} \\ L & -\frac{L}{K_m} \left(\frac{f}{\Phi(t)} + \frac{J\dot{\Phi}(t)}{\Phi^2(t)} \right) \end{bmatrix}.$$

Comme :

$$\dot{P}_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{JL\dot{\Phi}(t)}{K_m \Phi^2(t)} \\ 0 & \frac{L}{K_m} \left(\frac{f\dot{\Phi}(t)}{\Phi^2(t)} + \frac{2J\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^3(t)} - \frac{J\ddot{\Phi}(t)}{\Phi^2(t)} \right) \end{bmatrix},$$

et :

$$P_C^{-1}(t) = \frac{K_m \Phi(t)}{JL} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_m} \left(\frac{f}{\Phi(t)} + \frac{J\dot{\Phi}(t)}{\Phi^2(t)} \right) & \frac{J}{K_m \Phi(t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient ainsi :

$$P_C(t)B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P_C(t)A(t)P_C^{-1}(t) + \dot{P}_C(t)P_C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) \end{bmatrix},$$

où les coefficients $\psi_0(t)$ et $\psi_1(t)$ ont pour expressions :

$$\psi_0(t) = \frac{\ddot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} - \frac{\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} + \frac{K_m K_e}{JL} \Phi^2(t) + \frac{Rf}{JL} + \frac{R}{L} \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)},$$

$$\psi_1(t) = \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} + \frac{f}{J} + \frac{R}{L}.$$

Comme $C(t)P_C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} & 0 \end{bmatrix}$, l'algorithme de construction de la forme commandable conduit donc à :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) \end{bmatrix} x_C(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V(t), \\ \Omega(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} & 0 \end{bmatrix} x_C(t), \end{aligned} \tag{15}$$

avec $x_C(t) = P_C(t)x(t)$.

▽▽▽

6.2 Forme canonique observable

Contrairement au cas stationnaire, où l'utilisation de la transposition permet de construire la forme canonique commandable en utilisant l'algorithme de construction de la forme canonique commandable, la présence du terme en $\dot{P}(t)P^{-1}(t)$ dans un changement de variables nous interdit de pouvoir utiliser ici la même démarche. Il faudra donc utiliser l'algorithme spécifique décrit par les étapes suivantes. Notons :

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{bmatrix},$$

et supposons que $\text{rang } C(t) = m$ sur T . Si cela n'était pas le cas il suffirait de réduire le nombre d'entrées. Lorsque le système est observable sur T , les étapes suivantes, détaillées, à des permutations près, dans [19], permettent de construire la forme canonique d'observabilité. On pourra cependant remarquer que cet algorithme est similaire au précédent.

1. Dans la suite ordonnée de lignes :

$$L^0(c_1(t)), L^0(c_2(t)), \dots, L^0(c_m(t)), L^1(c_1(t)), L^1(c_2(t)), \dots, L^1(c_m(t)),$$

$$L^2(c_1(t)), \dots, L^2(c_m(t)), \dots, L^i(c_1(t)), \dots, L^i(c_m(t)), \dots$$

on sélectionne une ligne si elle n'est pas linéairement dépendante des précédentes.

2. On détermine alors les m indices d'observabilité ν_i , pour $i = 1, \dots, m$, comme le plus petit entier k tel que $L^k(c_i(t))$ soit linéairement dépendant des vecteurs précédents. On calcule les indices cumulés d'observabilité η_i :

$$i = 1, \dots, m, \quad \eta_i = \sum_{j=1}^i \nu_j.$$

$$B_O(t) = T_O(t)B(t),$$

$$C_O(t) = C(t)T_O^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \times & 1 & & 0 \\ \times & \times & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \times & \times & & 1 \\ \leftarrow \nu_1 \rightarrow & \leftarrow \nu_2 \rightarrow & & \leftarrow \nu_m \rightarrow \end{bmatrix}.$$

7. Un changement de variables de mesures sous la forme $y_O(t) = H_O^{-1}(t)y(t)$ où $H_O(t)$ est construite en prenant les colonnes non nulles de $C_O(t)$ et conduit à la relation $y_O(t) = \bar{C}_O x_O(t)$ où :

$$\bar{C}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \leftarrow \nu_1 \rightarrow & \leftarrow \nu_2 \rightarrow & & \leftarrow \nu_m \rightarrow \end{bmatrix}.$$

Exemple 7 [Moteur (suite)] Si à partir de l'équation d'état du moteur définie dans l'exemple 4 par les matrices (14), on cherche à en construire une forme canonique observable, l'algorithme se déroule de la façon suivante. Comme $W(t) = L_{\{2\}}(t)$:

$$W^{-1}(t) = \begin{bmatrix} f & J \\ \frac{K_m \Phi(t)}{1} & \frac{K_m \Phi(t)}{0} \end{bmatrix},$$

et on construit les vecteurs :

$$N_1(t) = \begin{bmatrix} J \\ \frac{K_m \Phi(t)}{0} \end{bmatrix}, N_2(t) = K^1(N_1(t)) = \begin{bmatrix} J \\ \frac{K_m \Phi(t)}{1} \left(\frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} - \frac{R}{L} \right) \end{bmatrix}.$$

La matrice du changement de variable, $P_O(t)$, est obtenue par :

$$P_O^{-1}(t) = [N_1(t) \quad N_2(t)],$$

soit :

$$P_O(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{J} & \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

et :

$$\dot{P}_O(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_m \dot{\Phi}(t)}{J} & \frac{\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} - \frac{\ddot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient ainsi :

$$C(t)P_O^{-1}(t) = [0 \quad 1],$$

$$P_O(t)A(t)P_O^{-1}(t) + \dot{P}_O(t)P_O^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix},$$

où les coefficients $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$ ont pour expressions :

$$\alpha_0(t) = \frac{\ddot{\Phi}(t)}{\dot{\Phi}(t)} - \frac{\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} + \frac{K_m K_e}{JL} \Phi^2(t) + \frac{Rf}{JL} - \frac{f\dot{\Phi}(t)}{J\Phi(t)},$$

$$\alpha_1(t) = \frac{f}{J} + \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)}.$$

Comme :

$$T_O(t)B(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} \\ 0 \end{bmatrix},$$

l'algorithme de construction de la forme observable conduit donc à :

$$\dot{x}_O(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix} x_O(t) + \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} \\ 0 \end{bmatrix} V(t), \quad (18)$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_O(t),$$

avec $x_O(t) = P_O(t)x(t)$. Remarquons, d'une part, que nous avons déjà trouvé cette forme à partir de la réalisation de l'équation différentielle entrée-sortie. $\nabla\nabla\nabla$

Lorsque l'on compare, les formes canoniques (15) et (18) obtenues respectivement dans les exemples 4 et 5, on s'aperçoit que, contrairement aux systèmes stationnaires, les formes commandables et observables d'une même équation d'état ne sont pas, dans leurs expressions, simplement les transposées l'une de l'autre.

6.3 Cas mono-entrée ou mono-mesure

Lorsque dans l'équation d'état (3), $B(t)$ est réduite à un vecteur $b(t)$ ou $C(t)$ à une ligne $c(t)$, ces cas peuvent être distingués du cas général car de nombreuses simplifications permettent d'éviter certains calculs. En effet, les algorithmes donnés dans [20] sont légèrement différents des algorithmes précédents car ils permettent de calculer directement la forme canonique puis la matrice de changement de variable. Pour ces algorithmes, nous aurons besoin de la matrice opérationnelle, que nous rappelons ici :

$$F_n(D) = \begin{bmatrix} 1 & D & D^2 & \dots & D^{n-3} & D^{n-2} & D^{n-1} \\ 0 & 1 & 2D & \dots & \dots & (n-2)D^{n-3} & (n-1)D^{n-2} \\ & & 1 & 3D & \dots & \binom{n-2}{2}D^{n-4} & \binom{n-1}{2}D^{n-3} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & (n-2)D & \binom{n-1}{2}D^2 \\ & & & & & 1 & (n-1)D \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

dont l'inverse est donnée par :

$$[F_n(D)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -D & D^2 & \dots & (-1)^{n-2}D^{n-3} & (-1)^{n-1}D^{n-2} & (-1)^n D^{n-1} \\ 0 & 1 & -2D & \dots & \dots & (-1)^{n-2}(n-2)D^{n-3} & (-1)^{n-1}(n-1)D^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3D & \dots & (-1)^{n-3}\binom{n-2}{2}D^{n-4} & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{2}D^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -(n-2)D & \binom{n-1}{2}D^2 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & -(n-1)D \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.3.1 Forme canonique commandable

Pour $m = 1$, lorsque le système est commandable, la matrice de commandabilité est régulière et est donnée par :

$$K_{\{n\}}(t) = [K^0(b(t)) \quad K^1(b(t)) \quad \cdots \quad K^{n-1}(b(t))].$$

On sait alors qu'il existe un changement de variables $x_C(t) = P_C(t)x(t)$ qui mette (3) sous la forme toujours commandable (??) avec :

$$A_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) & \cdots & -\psi_{n-2}(t) & -\psi_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Pour calculer les coefficients $\psi_i(t)$, nous aurons besoin de la matrice :

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^{n-1} \end{bmatrix},$$

telle que $U_n^2 = I_n$, et on calcule les quantités suivantes :

1. $K^n(b(t))$.
2. $\eta(t) = (-1)^{n-1} K_{\{n\}}^{-1}(t) K^n(b(t))$.
3. $\Psi(t) = [\psi_0(t) \quad \psi_1(t) \quad \cdots \quad \psi_{n-1}(t)]^T = U_n [F(D)]^{-1} U_n \eta(t)$.

Finalement, on a la formule de calcul :

$$\Psi(t) = (-1)^{n-1} U_n [F(D)]^{-1} U_n K_{\{n\}}^{-1}(t) K^n(b(t)).$$

Pour déterminer le changement de variables (12), on calcule la matrice de commandabilité de la paire $(A_C(t), B_C)$, soit $K_{\{n\}}^C(t)$ et on obtient :

$$P_C(t) = K_{\{n\}}^C(t) K(t)^{-1}.$$

En notant $C_C(t) = C(t) P_C^{-1}(t) = [\gamma_0(t) \quad \gamma_1(t) \quad \cdots \quad \gamma_{n-1}(t)]$ et $z(t)$ la première composante de $x_C(t)$, on obtient la forme différentielle suivante :

$$u(t) = z^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t) z^{(i)}(t), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) z^{(i)}(t).$$

La variable $z(t)$ mise en évidence dans les relations précédentes peut être interprétée comme l'état partiel du système linéaire ([8]) ou comme sa sortie plate ([5]). De plus, en posant :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F(D)\Psi(t), \\ \phi(t) &= F(D) [C(t)P^{-1}(t)]^T, \end{aligned}$$

on obtient une autre forme équivalente :

$$u(t) = z^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} D^i [\varphi_i(t)z(t)], \quad y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} D^i [\phi_i(t)z(t)].$$

Exemple 8 [Moteur (suite)] Nous allons appliquer cet algorithme sur le moteur à flux variable pour retrouver la forme canonique commandable que nous avons déjà mise en évidence dans l'exemple 4 mais en utilisant ici l'algorithme particulier aux systèmes mono-entrée. D'après (14), on a :

$$K^2(B(t)) = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{L^3} - \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL^2} \\ -\frac{K_m R \Phi(t)}{JL^2} - \frac{f K_m \Phi(t)}{J^2 L} - \frac{K_m \dot{\Phi}(t)}{JL} \end{bmatrix},$$

donc :

$$\eta(t) = -K_{\{2\}}^{-1}(t)K^2(B(t)) = \begin{bmatrix} \frac{fR}{JL} + \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL^2} + \frac{R\dot{\Phi}(t)}{L\Phi(t)} \\ \frac{R}{L} + \frac{f}{J} + \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \end{bmatrix}.$$

Comme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il vient :

$$\begin{bmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fR}{JL} + \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL^2} + \frac{R\dot{\Phi}(t)}{L\Phi(t)} + \frac{\ddot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} - \frac{\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} \\ \frac{R}{L} + \frac{f}{J} + \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \end{bmatrix}.$$

D'autre part, comme :

$$K_{\{2\}}^C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\psi_1(t) \end{bmatrix},$$

il vient :

$$P_C(t) = K_{\{2\}}^C(t)K_{\{2\}}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{JL}{K_m \Phi(t)} \\ L & -\frac{JL}{K_m \Phi(t)} \left(\frac{f}{J} + \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \right) \end{bmatrix}.$$

▽▽▽

6.3.2 Forme canonique observable

Pour $m = 1$, lorsque le système est observable, la matrice d'observabilité est régulière et est donnée par :

$$L_{\{n\}}(t) = \begin{bmatrix} L^0(c(t)) \\ L^1(c(t)) \\ \vdots \\ L^{n-1}(c(t)) \end{bmatrix}.$$

On sait alors qu'il existe un changement de variables (16) qui mette (3) sous la forme (17) avec :

$$A_O(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad C_O = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T. \quad (20)$$

Pour calculer les coefficients $\alpha_i(t)$, on calcule les quantités suivantes :

1. $L^n(c(t))$.
2. $\rho(t) = - \left[L_{\{n\}}^T(t) \right]^{-1} [L^n(c(t))]^T$.
3. $\alpha(t) = \left[\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_{n-1}(t) \right]^T = [F_n(D)]^{-1} \rho(t)$.

Finalement, cela se résume par la formule suivante :

$$\alpha(t) = - [F_n(D)]^{-1} \left[L_{\{n\}}^T(t) \right]^{-1} [L^n(c(t))]^T.$$

Pour déterminer le changement de variables (12), on calcule la matrice d'observabilité de la paire $(A_O(t), B_O)$, soit $L_{\{n\}}^O(t)$ et on obtient :

$$P_O(t) = \left[L_{\{n\}}^O(t) \right]^{-1} L_{\{n\}}(t).$$

Enfin, cela permet d'obtenir :

$$B_O(t) = P_O(t)B(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-2}(t) \\ \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Comme la forme observable est celle qui apparaît lorsque l'on réalise une relation différentielle entrée sortie, la construction de la forme observable constitue le moyen de passer d'une équation d'état linéaire non stationnaire quelconque à la forme différentielle reliant l'entrée à la sortie. On a donc obtenu ici un algorithme permettant de procéder à l'élimination des variables internes. En effet les fonctions $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ qui apparaissent dans cette forme canonique sont celles qui apparaissent dans l'équation différentielle entrée-sortie (8). On peut donc, dans le cas mono-entrée mono-sortie, passer directement de l'une à l'autre.

Exemple 9 [Moteur (suite)] Si à partir de l'équation d'état du moteur défini par les matrices (14), on cherche à en construire une forme canonique observable en utilisant l'algorithme particulier aux systèmes mono-sortie, celui-ci se déroule de la façon suivante. Comme :

$$L^2(c(t)) = \left[-\frac{K_m R \Phi(t)}{JL} - \frac{f K_m \Phi(t)}{J^2} + \frac{K_m \dot{\Phi}(t)}{J} - \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL} + \frac{f^2}{J^2} \right],$$

il vient :

$$\rho(t) = - \left[L_{\{2\}}^T(t) \right]^{-1} [L^2(c(t))]^T = \left[\frac{fR}{JL} - \frac{f\dot{\Phi}(t)}{J\Phi(t)} + \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL} \quad \frac{R}{L} + \frac{f}{J} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \right]^T,$$

donc :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rho(t) = \begin{bmatrix} \frac{fR}{JL} - \frac{f\dot{\Phi}(t)}{J\Phi(t)} + \frac{K_e K_m \Phi^2(t)}{JL} + \frac{\ddot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} - \frac{\dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} & \frac{R}{L} + \frac{f}{J} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \end{bmatrix}^T.$$

De plus, le changement de variable est donné par :

$$\begin{aligned} P_O(t) &= [L_{\{n\}}^O(t)]^{-1} L_{\{n\}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_m \Phi(t)}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{J} & \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

▽▽▽

7 Retour d'état

En ce qui concerne les systèmes linéaires, il existe deux méthodes principales pour concevoir un retour d'état : le placement de pôles et de structure, d'une part, et la commande optimale, d'autre part. Alors que la première solution passe nécessairement par l'utilisation des formes canoniques pour pouvoir poser sans ambiguïté la notion de placement de pôles pour les systèmes à paramètres variant dans le temps, la deuxième peut être menée directement sur le modèle initial. Pour le placement de pôles, et afin de simplifier l'exposé nous allons d'abord détailler le cas mono-entrée, afin d'en dégager les principes fondamentaux. L'extension au cas général sera effectuée dans une deuxième étape. En effet, d'après ce que nous avons précisé dans le paragraphe concernant le changement de variable, le placement de pôle consiste à transformer, par retour d'état, le système dont la matrice d'évolution $A(t)$ est à paramètres variants dans le temps en un système admettant une transformation de Lyapounov, c'est-à-dire qu'il existe un changement de variable transformant la matrice d'évolution en une matrice à paramètres constants. Nous verrons également que cette transformation conduit également à une matrice de transmission de la commande qui a la propriété d'être constante. L'objet de cette partie ve donc être la présentation de méthodes permettant de déterminer le gain $K(t)$ pour concevoir un retour d'état de la forme :

$$u(t) = v(t) - K(t)x(t), \quad (21)$$

où $v(t)$ est la nouvelle consigne. La section suivante, qui s'inspirera beaucoup des techniques que nous allons présenter maintenant, s'attachera quant à elle à développer des méthodes permettant de construire des observateurs de l'état du système (3) de façon à pouvoir mettre en œuvre la commande :

$$u(t) = v(t) - K(t)\hat{x}(t),$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état reconstruit.

7.1 Placement de pôles et de structure

Comme nous l'avons mentionné, la notion de pôle et *a fortiori* celle de structure, telle qu'on la connaît pour un système stationnaire, ne peut être clairement définie que si le système obtenu après le bouclage (21), à savoir :

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)K(t))x(t) + B(t)v(t),$$

admet une transformation de Lyapounov. De façon plus précise, il faut qu'il existe une matrice de changement de variables $P(t)$ telle la matrice :

$$P(t)(A(t) - B(t)K(t))P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t),$$

soit une matrice constante M dont on peut déterminer la structure. Rappelons que pour un système linéaire à coefficients constants :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= M\xi(t) + Nv(t), \\ y(t) &= \Gamma\xi(t),\end{aligned}$$

la structure est composée de la paire (J, D) correspondant à la décomposition de Jordan de la matrice M :

$$MD = DJ,$$

où J est la matrice de Jordan de M dont la diagonale principale est formée des valeurs propres de M , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ou pôles du système et $D = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]$ est la matrice des valeurs propres de M .

L'intérêt de cette décomposition réside dans le système obtenu après le changement de variables de matrice D^{-1} :

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= J\zeta(t) + D^{-1}Nv(t), \\ y(t) &= \Gamma D\zeta(t),\end{aligned}$$

qui permet par certains choix judicieux des vecteurs de D d'annuler des composantes des matrices $D^{-1}N$ ou ΓD . Cela conduit ainsi à résoudre des problèmes de couplages entre certaines variables d'entrée et certaines variables de sortie ou de provoquer des rejets de perturbations." stationnaire obtenu après une transformation de Lyapounov.

Par extension naturelle, nous considérerons comme structure du système non stationnaire, la structure du système

Nous allons voir que l'utilisation des formes canoniques va nous permettre de résoudre trivialement le problème du placement de pôle et du placement de structure car le principe de base consistera à choisir le gain de retour d'état $K(t)$ tel que la forme canonique associée soit à paramètres constants.

Avant de détailler ces techniques, rappelons au préalable que, dans le cas mono-entrée, seul le placement de pôle est possible, car on ne dispose que de n paramètres de réglage indépendants, les n composantes du vecteur $K(t)$ permettant de régler les n valeurs propres du système. Par contre, il a été établi dans [13], que pour le système (??) commandable avec rang $B = m$ et rang $C = l$, on peut placer arbitrairement :

- max (m, l) valeurs propres ;
- min (m, l) composantes de chaque vecteur propre correspondant.

Le fait de considérer ici une forme plus générale de l'équation d'état (??) où le nombre de sorties diffère du nombre d'entrées permet de considérer comme cas particuliers :

- le cas du retour d'état, en faisant $C = I$ donc $l = n$, et on s'aperçoit alors qu'un retour d'état permet de placer toutes les valeurs propres en boucle fermée et seulement m composantes des vecteurs propres ;
- le cas du retour de sortie, en faisant $l = m$, et on s'aperçoit que l'on peut placer seulement m valeurs propres du système en boucle fermée ;
- le cas du retour de mesures, où on dispose de plus de mesures que de sorties à contrôler avec $l > m$.

7.2 Placement de pôles en mono-entrée

Si on considère l'équation d'état $x_C(t)$ sous la forme commandable (13), alors le retour d'état :

$$u(t) = v(t) - G(t)x_C(t),$$

où $G(t) = [g_0(t) \ g_1(t) \ \cdots \ g_{n-1}(t)]$ conduit à :

$$\dot{x}_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\psi_0(t) - g_0(t) & -\psi_1(t) - g_1(t) & \cdots & -\psi_{n-2}(t) - g_{n-2}(t) & -\psi_{n-1}(t) - g_{n-1}(t) \end{bmatrix} x_C(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Il est évident que le choix, pour $i = 0$ à $n - 1$, $g_i(t) = g_i - \psi_i(t)$, où les g_i sont des constantes telles que le polynôme caractéristique :

$$p_{\text{BF}}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} g_i \lambda^i,$$

ait pour zéros les pôles désirés en boucle fermée, résout le problème d'un placement de pôles.

Pour un état quelconque $x(t)$, le gain de retour d'état peut alors être calculé via la matrice de changement de variable (??) qui met le système sous sa forme commandable, soit :

$$K(t) = G(t)P_C(t).$$

Exemple 10 On considère le système différentiel :

$$\ddot{y}(t) + (\cos t)\dot{y}(t) + (1 - \sin t)y(t) = \dot{u}(t) + u(t).$$

Pour en construire la forme observable on écrit l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$D^2y(t) + D[(\cos t)y(t)] + y(t) = Du(t) + u(t),$$

ce qui donne :

$$y(t) = I[u(t) - (\cos t)y(t) + I[u(t) - y(t)]].$$

L'introduction des variables d'état :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= I[u(t) - y(t)], \\ x_2(t) &= y(t) = I[u(t) - (\cos t)y(t) + x_1(t)], \end{aligned}$$

permet d'obtenir l'équation d'état $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ observable :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\cos t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \tag{22}$$

Pour construire la forme commandable à partir de cette forme observable, on détermine les vecteurs suivants :

$$K_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K_1(t) = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\cos t \end{bmatrix} K_0(t) + \dot{K}_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t - 1 \end{bmatrix},$$

soit :

$$K(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos t - 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $\det K(t) = \cos t - 2$, celui-ci n'est jamais identiquement nul et le système est commandable. L'algorithme de construction de la forme commandable conduit aux vecteurs :

$$\begin{aligned} K_2(t) &= - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\cos t \end{bmatrix} K_1(t) + \dot{K}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t - 1 & \\ -\cos t - \sin t - \sin^2 t & \end{bmatrix}, \\ \eta(t) &= -K^{-1}(t)K_2(t) = \frac{1}{2 - \cos t} \begin{bmatrix} 2 - \cos t + \sin t & \\ \cos^2 t - 2 \cos t - \sin t & \end{bmatrix}, \\ \Psi(t) &= \begin{bmatrix} \psi_0(t) \\ -\psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta(t) = \begin{bmatrix} \frac{5-4 \cos t - 4 \sin t + 5 \sin t \cos t - 2 \sin^2 t + 2 \sin^3 t}{(2-\cos t)^2} \\ \frac{\cos^2 t - 2 \cos t - \sin t}{2-\cos t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et à l'équation d'état $\zeta(t) = [\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t)]^T$:

$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (23)$$

Pour obtenir le changement de variable entre l'état $x(t)$ et l'état $\zeta(t)$ il faut obtenir la matrice de commandabilité de l'équation (23), soit :

$$\bar{K}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \psi_1(t) \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \bar{K}(t)K(t)^{-1}x(t), \\ &= \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\cos^2 t - 2 \cos t - \sin t}{2 - \cos t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t - 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \\ &= \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos t - \sin t - 2}{2 - \cos t} & \frac{3 \cos t + \sin t - \cos^2 t - 2}{2 - \cos t} \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Le changement de variable inverse est donné par :

$$x(t) = \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} \frac{3 \cos t + \sin t - \cos^2 t - 2}{2 - \cos t} & 1 \\ -\frac{\cos t - \sin t - 2}{2 - \cos t} & 1 \end{bmatrix} \zeta(t),$$

ce qui conduit à la deuxième partie de l'équation d'état, dont la première partie est (23) :

$$y(t) = \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} -\frac{\cos t - \sin t - 2}{2 - \cos t} & 1 \end{bmatrix} \zeta(t).$$

A partir de l'équation d'état commandable que l'on vient d'obtenir, soit :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} -\frac{\cos t - \sin t - 2}{2 - \cos t} & 1 \end{bmatrix} \zeta(t), \end{aligned}$$

on peut envisager le retour d'état :

$$u(t) = v(t) - \begin{bmatrix} g_0(t) & g_1(t) \end{bmatrix} \zeta(t),$$

où $g_0(t) = g_0 - \psi_0(t)$ et $g_1(t) = g_1 - \psi_1(t)$, g_0 et g_1 étant des constantes définies par le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée, soit $p^2 + g_1 p + g_0$.

▽▽▽

7.3 Cas multi-entrées

Lorsque le système (3) est commandable, celui-ci, par le changement de variable, $x_C = P_C(t)x$, et le changement de commande, $u_C = H_C(t)u$, où H_C est la matrice $(m \times m)$ formée des lignes significatives de B_C :

$$H_C(t) = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

peut être mis sous la forme canonique commandable :

$$\dot{x}_C(t) = A_C(t)x_C(t) + \bar{B}_C u_C(t), \quad (25)$$

où, les μ_i sont les indices de commandabilité et :

$$A_C = \begin{bmatrix} A_C^{11} & A_C^{12} & \cdots & A_C^{1m} \\ A_C^{21} & A_C^{22} & \cdots & A_C^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_C^{m1} & A_C^{m2} & \cdots & A_C^{mm} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_C = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_i \right\},$$

avec $A_C^{ij}(t)$ une matrice $(\mu_i \times \mu_j)$ ayant la structure suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } i &= j, A_C^{ii}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & a_C^{ii}(t) & \end{bmatrix}, \\ \text{si } i &\neq j, A_C^{ij}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & a_C^{ij}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette structure va permettre un résolution simple du problème de placement de pôles. En effet, comme une matrice compagne retrouve sur sa dernière ligne l'opposé des coefficients de son polynôme caractéristique :

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix} \right) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

et que le polynôme caractéristique est inchangé par un changement de variables d'état, une détermination du gain de bouclage va passer par les étapes suivantes :

1. Décomposition du polynôme caractéristique désiré $\tilde{a}(\lambda)$ en m polynômes caractéristiques $\tilde{a}_i(\lambda)$, chacun de degré μ_i :

$$\tilde{a}(\lambda) = \prod_{i=1}^m \tilde{a}_i(\lambda).$$

2. Soient \tilde{a}_C^{ii} les m vecteurs lignes formés par les opposés des coefficients des polynômes $\tilde{a}_i(\lambda)$ et \tilde{A}_C^{ii} , la matrice compagne associée :

$$\tilde{A}_C^{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \tilde{a}_C^{ii} & \end{bmatrix}, \quad (26)$$

et $\tilde{A}_C = \text{diag} \left\{ \tilde{A}_C^{ii} \right\}$.

3. Soit $K_C(t)$ le gain de retour d'état en x_C que l'on va partitionner en :

$$K_C(t) = \begin{bmatrix} k_C^{11} & k_C^{12} & \cdots & k_C^{1m} \\ k_C^{21} & k_C^{22} & \cdots & k_C^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_C^{m1} & k_C^{m2} & \cdots & k_C^{mm} \end{bmatrix},$$

où les $k_C^{ij}(t)$ sont des vecteurs ligne de μ_i composantes.

4. Grâce à la structure de \overline{B}_C , on peut obtenir :

$$\tilde{A}_C = A_C(t) - \overline{B}_C K_C(t).$$

Il suffit, pour obtenir une matrice \tilde{A}_C constante dont les valeurs propres sont fixées *a priori*, de prendre :

- pour $i \neq j$, $k_C^{ij}(t) = a_C^{ij}(t)$;
- pour $i = j$, $k_C^{ii}(t) = a_C^{ii}(t) - \tilde{a}_C^{ii}$.

5. Comme $K_C(t) = H_C(t)K(t)T_C^{-1}(t)$, on obtient l'expression du gain de retour d'état en x :

$$K(t) = H_C^{-1}(t)K_C(t)T_C(t).$$

On peut remarquer que cette détermination, qui n'est pas unique, généralise celle obtenue dans le cas mono-entrée. D'autre part, pour placer les n pôles du système, nous n'avons besoin que de n paramètres. Or K possède nm paramètres à déterminer qu'ici nous avons tous utilisés. En regardant un peu mieux, on aurait pu se contenter d'utiliser que :

$$\sum_{i=1}^m i\mu_i$$

paramètres pour arriver au même résultat. Toujours est-il que l'on a utilisé beaucoup plus de paramètres que nécessaire pour placer les pôles du systèmes. Nous allons voir dans la suite que les paramètres qui restent peuvent être utilisés pour placer quelques vecteurs propres du système bouclé.

7.4 Placement de structure

La clé du placement de la structure du système en boucle fermée, c'est-à-dire le placement de la paire (J, D) correspondant à la décomposition de Jordan de la matrice \tilde{A}_C obtenue après le retour d'état (??), repose sur la relation :

$$(A_C(t) - \overline{B}_C K_C(t))D = DJ.$$

En supposant que la matrice J est diagonale, ce qui n'est pas restrictif car pour des raisons de robustesse des résultats numériques et simplification notable des calculs, en reprenant les notations précédentes, soit :

$$J = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ et } D = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n],$$

la relation précédente s'écrit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (A_C(t) - \bar{B}_C K_C(t))d_i = \lambda_i d_i.$$

Le problème consiste donc à chercher $K_C(t)$ telle que cette relation soit vérifiée lorsque les vecteurs de D ont certaines composantes imposées ou vérifient certaines contraintes qui s'expriment sous la forme d'une relation linéaire $E_i d_i = 0$.

Une façon simple de résoudre consiste, en reprenant les notations du paragraphe précédent à choisir déjà :

$$\text{pour tout } (i, j), \quad k_C^{ij}(t) = a_C^{ij}(t) - \tilde{a}_C^{ij},$$

où les \tilde{a}_C^{ij} sont des vecteurs constants mais non fixés *a priori*. Cela permet de transformer la matrice $A_C(t) - \bar{B}_C K_C(t)$ en une matrice constante \tilde{A}_C , à déterminer, dont la structure vérifie les relations, pour tout i :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_C - \lambda_i I \\ E_i \end{bmatrix} d_i = 0.$$

7.5 Retour d'état optimal

Une autre façon d'envisager le calcul d'un retour d'état est la minimisation d'un critère optimal ([12, 1]). Cette forme de commande peut être envisagée de deux façons, en régulation ou en poursuite, mais dans les deux cas le gain de retour d'état (21) est identique, seul change l'élaboration de la consigne $v(t)$.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au problème de régulation optimale suivant : pour le système défini par l'équation d'état (3), on cherche le retour d'état, défini entre les instants t_0 et T :

$$u(t) = -K(t)x(t),$$

qui minimise le critère :

$$J(t_0) = x^T(T)Px(T) + \int_{t_0}^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt,$$

où P est définie positive et pour tout t , $Q(t)$ est semi-définie positive et $R(t)$ définie positive.

La solution à ce problème ([12, 1]) s'exprime sous la forme :

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t),$$

où $P(t)$ est une solution définie positive entre les instants t_0 et T de l'équation de Riccati différentielle :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t),$$

telle que $P(T) = P$.

Si maintenant on s'intéresse au problème de poursuite optimale suivant : pour le système défini par l'équation d'état (3), on cherche le retour d'état, défini entre les instants t_0 et T :

$$u(t) = G(t)v(t) - K(t)x(t),$$

qui minimise le critère :

$$J(t_0) = e^T(T)Pe(T) + \int_{t_0}^T (e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt,$$

où :

$$e(t) = r(t) - C(t)x(t),$$

où $r(t)$ est une trajectoire de référence à suivre sur la sortie $y(t)$ et P est définie positive et pour tout t , $Q(t)$ est semi-définie positive et $R(t)$ définie positive.

La solution à ce problème ([12, 1]) s'exprime sous la forme :

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t),$$

où $P(t)$ est une solution définie positive entre les instants t_0 et T de l'équation de Riccati différentielle :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t),$$

telle que $P(T) = P$, équations obtenues dans le problème précédent aux quelles s'ajoutent la relation :

$$G(t) = R^{-1}(t)B^T(t),$$

et $v(t)$ est la solution de cette équation différentielle doit

Dans le cas où le système est commandable et observable, la solution définie positive de l'équation différentielle de Riccati est unique et le système bouclé est asymptotiquement stable.

8 Observation

Comme dans toute comande par retour d'état, se pose le problème de l'observation des variables internes non mesurées. C'est ce que nous allons traiter dans cette partie en détaillant le cas des systèmes mono-mesures et en évoquant rapidement le cas plus général des systèmes multi-mesures, la seule difficulté dans ce cas étant la construction de l'équation permettant de déterminer l'observateur réduit.

8.1 Construction d'observateurs pour $m = 1$

A partir de l'équation d'état $z(t)$ sous forme observable (20), on peut proposer des observateurs d'ordre plein ou réduit de cet état. L'état initial étant bien sûr reconstruit à partir du changement de variables qui conduit à la forme observable.

8.1.1 Observateur d'ordre plein

Compte tenu de la structure de (20), on peut proposer l'observateur :

$$\dot{\hat{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0(t) - l_0(t) \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1(t) - l_1(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2}(t) - l_{n-2}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}(t) - l_{n-1}(t) \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-2}(t) \\ \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} l_0(t) \\ l_1(t) \\ \vdots \\ l_{n-2}(t) \\ l_{n-1}(t) \end{bmatrix} y(t).$$

Il est évident que le choix, pour $i = 0$ à $n - 1$, $l_i(t) = l_i - \alpha_i(t)$, où les l_i sont des constantes telles que le polynôme caractéristique :

$$p_O(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} l_i \lambda^i,$$

ait tous ses zéros à partie réelle négative, conduit à un observateur asymptotique de $z(t)$.

8.1.2 Observateur d'ordre réduit

Comme dans (20) la sortie est la dernière composante de l'état, il n'y a pas lieu de reconstruire cette dernière. On peut ainsi obtenir un observateur d'ordre réduit $n - 1$. Soient $\chi(t)$ le vecteur regroupant les $n - 1$ premières composantes de l'état $z(t)$, $b(t)$ le vecteur regroupant les $n - 1$ premières composantes de $B(t)$, $\chi(t)$ est régi par l'équation :

$$\dot{\chi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \chi(t) - \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-2}(t) \end{bmatrix} u(t),$$

$$\dot{y}(t) + \alpha_{n-1}(t)y(t) - \beta_{n-1}(t)u(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \chi(t).$$

On peut proposer l'observateur :

$$\dot{\hat{\chi}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\chi}(t) - \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-2}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$+ \Lambda(t)(\dot{y}(t) + \alpha_{n-1}(t)y(t) - \beta_{n-1}(t)u(t) - [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \hat{\chi}(t)),$$

où $\Lambda(t) = [\lambda_0(t) \ \lambda_1(t) \ \cdots \ \lambda_{n-2}(t)]$ est le gain de l'observateur. De façon à éviter la dérivation de la sortie, on introduit le vecteur $\zeta(t) = \hat{\chi}(t) - \Lambda(t)y(t)$, et l'observateur réduit se réécrit sous la forme :

$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & -\lambda_0(t) \\ & \ddots & -\lambda_1(t) \\ & & \vdots \\ & & 1 & -\lambda_{n-2}(t) \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} \beta_0(t) - \beta_{n-1}(t)\lambda_0(t) \\ \beta_1(t) - \beta_{n-1}(t)\lambda_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-2}(t) - \beta_{n-1}(t)\lambda_{n-2}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} -\alpha_0(t) - \dot{\lambda}_0(t) + (\alpha_{n-1}(t) - \lambda_{n-2}(t))\lambda_0(t) \\ \lambda_0(t) - \alpha_1(t) - \dot{\lambda}_1(t) + (\alpha_{n-1}(t) - \lambda_{n-2}(t))\lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_{n-3}(t) - \alpha_{n-2}(t) - \dot{\lambda}_{n-2}(t) + (\alpha_{n-1}(t) - \lambda_{n-2}(t))\lambda_{n-2}(t) \end{bmatrix} y(t).$$

Comme la dynamique de l'erreur est fixée par les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{bmatrix} & -\lambda_0(t) \\ 1 & -\lambda_1(t) \\ & \vdots \\ & 1 & -\lambda_{n-2}(t) \end{bmatrix}$$

il suffit de choisir pour tout i , les $\lambda_i(t)$ égaux à des constantes λ_i judicieusement choisies pour maîtriser complètement l'erreur d'observation et obtenir un observateur asymptotique.

Exemple 11 [Suite de l'exemple 10]

La première application de la forme observable (22) est dans la détermination d'un observateur asymptotique. Suivant la technique présentée précédemment, un observateur d'ordre plein de gain $l(t) = [l_0(t) \ l_1(t)]^T$ de l'état $x(t)$ est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\cos t \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + l(t) (y(t) - [0 \ 1] \hat{x}(t)),$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 - l_0(t) \\ 1 & -\cos t - l_1(t) \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + l(t)y(t).$$

En posant $l_0(t) = l_0 - 1$ et $l_1(t) = l_1 - \cos t$, où le polynôme $p^2 + l_1p + l_0$ est un polynôme de Hurwitz, cet observateur est asymptotique et l'erreur d'observation tend vers 0 avec la dynamique imposée par les racines de ce polynôme.

Comme $x_2(t) = y(t)$, on peut obtenir un observateur réduit pour estimer $x_1(t)$. Cet observateur, de gain $\lambda(t)$, a une structure qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= -y(t) + u(t) + \lambda(t) [\dot{y}(t) + (\cos t)y(t) - u(t) - \hat{x}_1(t)], \\ &= -\lambda(t)\hat{x}_1(t) + (1 - \lambda(t))u(t) + (\lambda(t) \cos t - 1)y(t) + \lambda(t)\dot{y}(t).\end{aligned}$$

Pour éviter la dérivation de la sortie on introduit la variable $z(t) = \hat{x}_1(t) - \lambda(t)y(t)$, ce qui permet d'obtenir l'observateur réduit :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -\lambda(t)z(t) + (1 - \lambda(t))u(t) + (\lambda(t) \cos t - \dot{\lambda}(t) - \lambda^2(t))y(t), \\ \hat{x}_1(t) &= z(t) + \lambda(t)y(t).\end{aligned}$$

Comme nous sommes dans le cas d'un système à paramètre variant dans le temps de dimension 1, l'erreur d'observation $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ tend asymptotiquement vers 0 si et seulement si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau = \infty.$$

Un choix simple consiste à prendre $\lambda(t)$ égal à une constante positive.

L'utilisation du changement de variable (24) entre $x(t)$ et $\zeta(t)$ permet de proposer le régulateur-observateur suivant pour mettre en œuvre le retour d'état déterminé au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -\lambda(t)z(t) + (1 - \lambda(t))u(t) + (\lambda(t) \cos t - \dot{\lambda}(t) - \lambda^2(t))y(t), \\ \hat{x}_1(t) &= z(t) + \lambda(t)y(t) \\ u(t) &= v(t) - \frac{1}{\cos t - 2} \begin{bmatrix} g_0(t) & g_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos t - \sin t - 2}{2 - \cos t} & \frac{3 \cos t + \sin t - \cos^2 t - 2}{2 - \cos t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

où $\lambda(t)$ vérifie la condition de stabilité asymptotique de l'observateur.

▽▽▽

8.2 Cas multi-mesures

Outre le fait que l'on peut réaliser un observateur d'ordre plein qui reconstruirait toutes les composantes de l'état en appliquant ce que l'on a développé dans le cas mono-mesure et en utilisant une technique de placement de pôles pour placer les dynamiques de l'observateur, on peut bien sûr songer à construire un observateur réduit de taille $n - m$ où m est le nombre de mesures indépendantes dont on dispose. C'est cette structure que nous allons voir ici.

Considérons donc le système non stationnaire régi par l'équation d'état (3), où après une permutation éventuelle des variables d'état, les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, et le vecteur $x(t)$ sont partitionnés sous la forme :

$$\begin{aligned}A(t) &= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix}, \\ C(t) &= [C_1(t) \quad C_2(t)], \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

où, pour tout t , $\text{rang } C_1(t) = l$, $A_{11}(t)$ et $C_1(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $x_1(t) \in \mathbb{R}^l$, et $B_1(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Notons que pour alléger les notations nous omettrons souvent l'argument t dans les matrices impliquées.

Le changement de variables :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} x,$$

transforme le système (3) en :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t),\end{aligned}\tag{27}$$

où, en prenant la même partition que précédemment :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [I_m \quad 0],$$

avec :

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= [C_1 A_{11} + C_2 A_{21} + \dot{C}_1] C_1^{-1}, \\ \bar{A}_{12} &= -\bar{A}_{11} C_2 + [C_1 A_{12} + C_2 A_{22}] + \dot{C}_2, \\ \bar{A}_{21} &= A_{21} C_1^{-1}, \\ \bar{A}_{22} &= A_{22} - A_{21} C_1^{-1} C_2, \\ \bar{B}_1 &= C_1 B_1 + C_2 B_2.\end{aligned}$$

L'équation d'état (27) s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1(t) &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1 u(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + B_2 u(t), \\ y(t) &= \bar{x}_1(t),\end{aligned}\tag{28}$$

où la sortie correspond aux l premières composantes d'état, elles n'ont donc pas à être reconstruites.

La première équation de (28) peut alors être considérée comme une mesure $\xi(t)$ dépendant de $\bar{x}_2(t)$, variables d'état à reconstruire, et de $u(t)$:

$$\xi(t) = \dot{\bar{x}}_1(t) - \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) = \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1 u(t).$$

Suivant le principe de construction des observateurs, on peut proposer comme reconstruteur de $\bar{x}_2(t)$, le vecteur $\hat{v}(t)$ défini par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}}(t) &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\hat{v}(t) + B_2 u(t) + \bar{L}(t)[\xi(t) - \hat{\xi}(t)], \\ \bar{x}_1(t) &= y(t), \quad \hat{\xi}(t) = \bar{A}_{12}\hat{v}(t) + \bar{B}_1 u(t),\end{aligned}$$

où $\bar{L}(t)$ est le gain à coefficients variants dans le temps de cet observateur.

Comme $\xi(t) = \dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t)$, l'inconvénient de cette structure est de nécessiter, pour élaborer la mesure $\xi(t)$, la dérivation de la sortie réelle $y(t)$. De façon à contourner cette difficulté, on définit la variable :

$$z(t) = \hat{v}(t) - \bar{L}(t)y(t),$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \dot{\hat{v}}(t) - \bar{L}(t)\dot{y}(t) - \dot{\bar{L}}(t)y(t), \\ &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\hat{v} + B_2 u - \dot{\bar{L}}(t)y(t) \\ &\quad - \bar{L}[\bar{A}_{11}y(t) + \bar{A}_{12}\hat{v}(t) + \bar{B}_1 u(t)],\end{aligned}\tag{29}$$

où n'apparaît aucune dérivation de la sortie. En tenant compte du fait que $\hat{v}(t) = z(t) + \bar{L}y(t)$ et $\bar{x}_1(t) = y(t)$, (29) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \bar{M}(t)z(t) + \bar{N}(t)u(t) + \bar{P}(t)y(t), \\ \bar{M}(t) &= \bar{A}_{22}(t) - \bar{L}(t)\bar{A}_{12}(t), \\ \bar{N}(t) &= B_2(t) - \bar{L}(t)\bar{B}_1(t), \\ \bar{P}(t) &= \bar{A}_{21}(t) + \bar{A}_{22}(t)\bar{L}(t) - \bar{L}(t)\bar{A}_{11}(t) - \bar{L}(t)\bar{A}_{12}(t)\bar{L}(t) - \dot{\bar{L}}(t).\end{aligned}\tag{30}$$

Cette équation d'état complétée par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= C_1^{-1}[(I - C_2\bar{L})y(t) - C_2\hat{z}(t)], \\ \hat{x}_2(t) &= z(t) + \bar{L}y(t).\end{aligned}$$

définit un observateur réduit (d'ordre $n - l$) pour le système (28), où $\bar{L}(t)$ est la matrice $((n - l) \times l)$ de gain de cet observateur. En notant l'erreur d'observation $e(t) = \bar{x}_2(t) - \bar{v}(t)$, il vient :

$$\dot{e}(t) = \bar{M}(t)e(t),$$

ainsi, lorsque la paire $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ est observable, les dynamiques de l'erreur d'observation de $\bar{M}(t)$ peuvent être fixées arbitrairement par un choix convenable de $\bar{L}(t)$. On utilise alors la technique utilisée pour la conception d'un observateur d'ordre plein, mais cette fois en partant de la forme canonique observable de la paire $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$. Dans le cas particulier où $\bar{A}_{12}(t)$ est inversible pour tout t , une méthode rapide consiste à poser :

$$\bar{A}_{22}(t) - \bar{L}(t)\bar{A}_{12}(t) = F,$$

où F est une matrice constante qui possède comme valeurs propres les dynamiques désirées pour l'observateur réduit (30). Cela donne donc :

$$\bar{L}(t) = (\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t),$$

soit finalement :

$$\begin{aligned}[4pt]\bar{M}(t) &= F, \\ \bar{N}(t) &= B_2(t) - (\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t)\bar{B}_1(t), \\ \bar{P}(t) &= \bar{A}_{21}(t) + \bar{A}_{22}(t)(\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t) - (\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t)\bar{A}_{11}(t) \\ &\quad - (\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t)\bar{A}_{12}(t)(\bar{A}_{22}(t) - F)\bar{A}_{12}^{-1}(t) - \dot{\bar{A}}_{22}(t)\bar{A}_{12}^{-1}(t) - (\bar{A}_{22}(t) - F)\dot{\bar{A}}_{12}^{-1}(t).\end{aligned}$$

9 Commande et régulation du moteur

On reprend ici l'exemple du moteur à flux variable que l'on a déjà utilisé dans pratiquement tous les exemples. Le problème que l'on a à traiter ici consiste à réguler la vitesse de rotation du moteur autour d'une valeur constante malgré un flux induit soumis à une perturbation périodique de la forme :

$$\Phi(t) = \Phi_0(1 + 0.1 \sin(\pi t)),$$

où $\Phi_0 = 1$ Wb.

Les exemples précédents ont montré que l'on pouvait prendre comme équation d'état initiale pour ce moteur la forme observable (que nous rappelons pour la clarté de l'exposé) :

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0(t) \\ 1 & -\alpha_1(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} \\ 0 \end{bmatrix} V(t), \\ \Omega(t) &= [0 \quad 1] X(t),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\alpha_0(t) &= \frac{K_m K_e}{JL} \Phi(t)^2 - \frac{f \dot{\Phi}(t)}{J \Phi(t)} + \frac{Rf}{LJ} + \frac{\ddot{\Phi}(t) \Phi(t) - \dot{\Phi}(t)^2}{\Phi(t)^2}, \\ \alpha_1(t) &= \frac{f}{J} + \frac{R}{L} - \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)}.\end{aligned}$$

A partir de la quelle, l'algorithme de construction de la forme commandable conduit à :

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\psi_0(t) & -\psi_1(t) \end{bmatrix} Z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V(t), \\ \Omega(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_m \Phi(t)}{JL} & 0 \end{bmatrix} Z(t),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= \frac{\ddot{\Phi}(t)\Phi(t) - \dot{\Phi}^2(t)}{\Phi^2(t)} + \frac{K_m K_e}{JL} \Phi^2(t) + \frac{Rf}{JL} + \frac{R\dot{\Phi}(t)}{L\Phi(t)}, \\ \psi_1(t) &= \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} + \frac{f}{J} + \frac{R}{L}.\end{aligned}$$

En utilisant l'un algorithme de construction de la forme commandable, les vecteurs d'état que nous venons de mettre en évidence sont reliés par le changement de variables $Z(t) = P(t)X(t)$ où :

$$P(t) = \frac{JL}{K_m \Phi(t)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\left(\frac{f}{J} + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}.$$

La commande complète du moteur va être réalisée en plusieurs étapes :

– un placement de pôles sur la forme commandable par :

$$V(t) = v(t) - \begin{bmatrix} k_0 - \psi_0(t) & k_1 - \psi_1(t) \end{bmatrix} Z(t);$$

– un suivi de trajectoire asymptotique par :

$$v(t) = (p^2 + k_1 p + k_0) \left(\frac{JL\Omega^d(t)}{K_m \Phi(t)} \right),$$

où $\Omega^d(t)$ est le profil à suivre au niveau de la vitesse du moteur. Lorsque k_1 et k_0 sont positifs, l'erreur $\frac{JL(\Omega^d(t) - \Omega(t))}{K_m \Phi(t)}$ tend vers 0, et comme $\Phi(t)$ ne s'annule pas tout en restant bornée, cela garantit que

$\Omega^d(t) - \Omega(t)$ tend asymptotiquement vers 0;

– une observation de $Z(t)$ qui est réalisée par un observateur réduit qui reconstruit la première composante de $X(t)$. Sa structure est donnée par :

$$\dot{\xi}(t) = -\lambda \xi(t) + \beta(t)V(t) + (-\alpha_0(t) + \lambda \alpha_1(t) - \lambda^2) \Omega(t),$$

où λ est une constante qui fixe la dynamique de l'observateur. On obtient ainsi une reconstruction de l'état de la forme observable par $\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) + \lambda \Omega(t) & \Omega(t) \end{bmatrix}^T$, et de l'état de la forme commandable par $\hat{Z}(t) = P(t)\hat{X}(t)$.

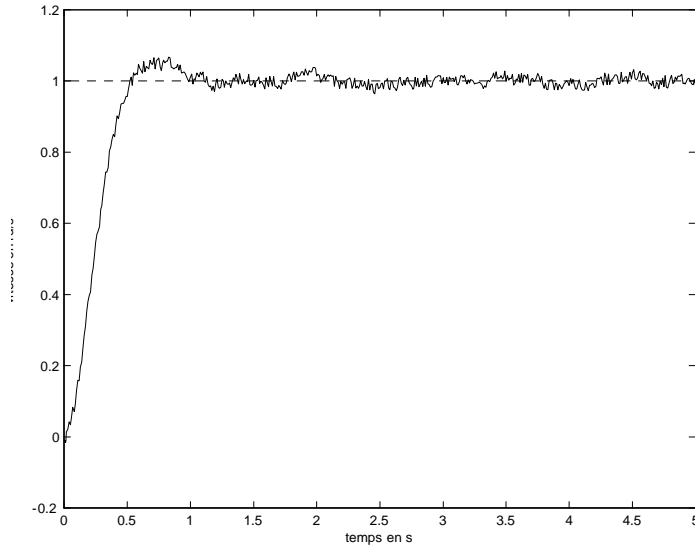
On obtient finalement la structure du régulateur-observateur générant la commande sous la forme :

$$\begin{aligned}V(t) &= (p^2 + k_1 p + k_0) \left(\frac{JL\Omega^d(t)}{K_m \Phi(t)} \right) - \begin{bmatrix} k_0 - \psi_0(t) & k_1 - \psi_1(t) \end{bmatrix} P(t)\hat{X}(t), \\ \dot{\xi}(t) &= -\lambda \xi(t) + \beta(t)V(t) + (-\alpha_0(t) + \lambda \alpha_1(t) - \lambda^2) \Omega(t), \\ \hat{X}(t) &= \begin{bmatrix} \xi(t) + \lambda \Omega(t) & \Omega(t) \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

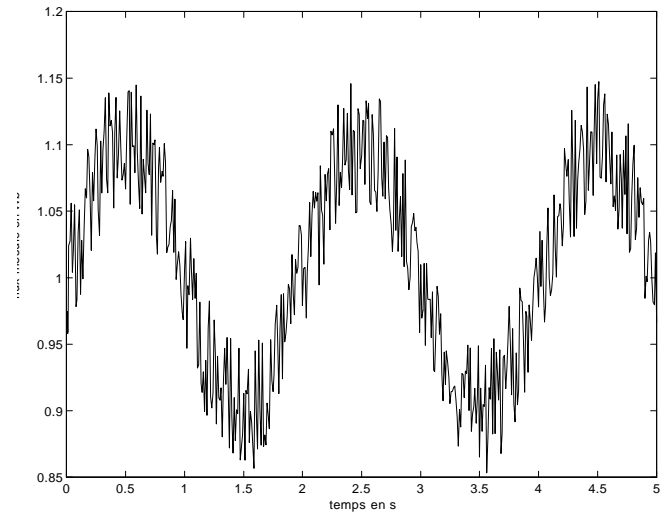
Dans l'expérimentation suivante, les valeurs des paramètres caractéristiques sont données dans la table suivante :

Désignation	Notation	Valeur
résistance rotorique	R	2Ω
inductance rotorique	L	0.5 H
constante de force contre-électromotrice	K_e	0.1 N m/Wb A
constante de couple électro-magnétique	K_m	0.1 N m/Wb A
inertie du rotor et de la charge	J	$0.02 \text{ kg/m}^2 \text{ s}^2$
coefficient de frottement visqueux	f	0.2 N m s

et pour la régulation de vitesse sera réalisée autour d'une valeur constante $\Omega^d(t) = 1 \text{ rad/s}$. Nous avons choisi de prendre le pôle de l'observateur en -5 (*i.e.* λ) et les dynamiques de l'erreur de poursuite en $-4.20 \pm 4.28i$ (ce qui correspond à un temps de réponse de 0.5 secondes et un coefficient d'amortissement de 0.7) ce qui fixe $k_1 = 8.4$ et $k_0 = 36$. La mise en œuvre de cette stratégie de commande conduit à la courbe de la figure 9 qui montre bien le comportement régulé obtenu pour la vitesse, et ceci malgré des phénomènes de bruits sur la mesure de la vitesse et le flux, comme l'indique la figure ??.

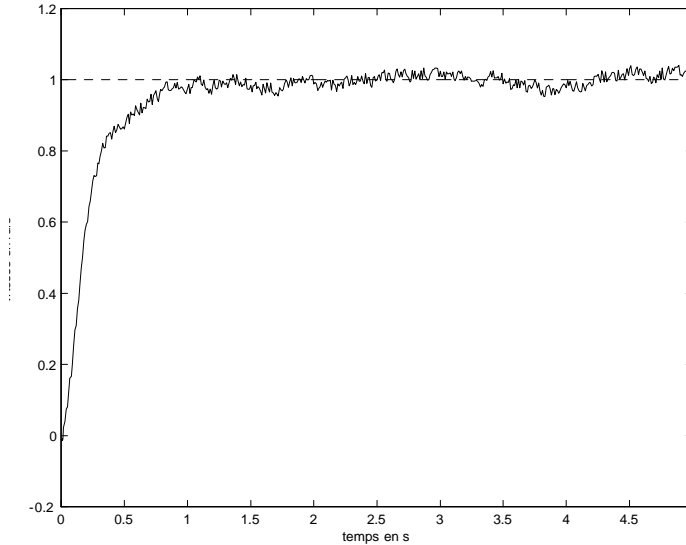


Vitesse de rotation du rotor.



Mesure du flux induit.

Pour tester la robustesse du contrôle réalisé, nous avons réalisé une expérimentation supplémentaire avec un moteur dont les paramètres sont légèrement différents du moteur initial mais en conservant la commande précédente. Les nouvelles valeurs des paramètres J et L sont respectivement de $0.016 \text{ kg/m}^2 \text{ s}^2$ et 0.25 H soit une chute 20% pour l'un et 50% pour l'autre. La courbe obtenue sur la figure ?? montre bien la robustesse de la commande prenant en compte les variations temporelles des paramètres.



Effet d'une erreur sur les paramètres.

10 Découplage

De façon à pouvoir assurer un pilotage plus facile des systèmes il peut être intéressant de découpler les entrées et les sorties pour obtenir finalement un système diagonal où une entrée influence une sortie et une seule. Une fois réalisée cette propriété il est alors aisé, en utilisant des techniques propres aux systèmes mono-entrée mono-sortie de pouvoir régler les performances du système canal par canal. De façon plus précise, pour un processus dont le nombre de sorties est identique au nombre d'entrées :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Pi} \left(\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \right) = \mathbf{\Pi}(u(t)),$$

il s'agit de déterminer le bouclage, appelé commande découplante ou non interactive :

$$u(t) = B(v(t), x(t)),$$

où $v(t) = [v_1(t) \ \cdots \ v_m(t)]^T$ est le nouveau vecteur de commande, tel que :

$$\text{pour tout } i \text{ dans } \{1, \dots, m\}, \quad y_i(t) = \Phi_i(v_i(t)).$$

Nous avons déjà vu que l'on pouvait, grâce à un placement de structure, réussir à découpler certaines sorties de certaines entrées, c'est-à-dire ne réaliser qu'un découplage partiel. Nous allons voir dans ce chapitre, des méthodes pour concevoir un retour d'état permettant d'obtenir un découplage diagonal. Cependant, nous allons nous apercevoir d'un certain nombre de points comme le fait que ce retour d'état peut être statique, sous la forme d'un gain, ou dynamique, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'un système dynamique, ou que le découplage diagonal, relativement aux sorties considérées initialement, n'est pas toujours possible. Dans ce dernier cas nous verrons que si l'on choisit d'autres sorties que celles initialement considérées alors le découplage relativement à ces nouvelles sorties devient possible. La notion de platitude peut nous être d'un grand secours dans ce cas de figure. En effet, la mise en évidence des sorties plates nous conduira toujours à la commande découplante, mais bien sûr relativement à ces sorties.

10.1 Découplage par retour statique

Considérons le système défini par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (31)$$

où pour tout t , $x(t)$ est dans \mathbb{R}^n , $u(t)$ et $y(t)$ sont dans \mathbb{R}^m . Les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, et $D(t)$ ont leur coefficients qui dépendent du temps et sont supposées suffisamment dérivables et nous noterons $C_i(t)$ et $D_i(t)$ les i -ièmes lignes des matrices $C(t)$ et $D(t)$, soit, pour i de 1 à m et en notant $y_i(t)$ la i -ième composante de $y(t)$:

$$y_i(t) = C_i(t)x(t) + D_i(t)u(t).$$

Nous allons voir que le principe du découplage est largement fondé sur la mise en évidence de la matrice $D(t)$ qui n'apparaissait pas dans l'équation d'état initiale (3) et qu'il va également utiliser l'opérateur différentiel $L^i(N(t))$ défini dans la paragraphe sur la commandabilité et l'observabilité d'une équation d'état. Comme tout ce qui précède, le principe du découplage reste identique à celui utilisé pour les systèmes linéaires invariants si ce n'est que les dérivations à réaliser sont plus minutieuses.

Pour ce faire, on définit les m degrés différentiels, relativement à un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$ sous la forme suivante :

- pour $i = 1$ à m , si $\forall t \in T, D_i(t) \neq 0$ alors $r_i = 0$;
- sinon, pour $j = 0$ à $r_i - 2$, si $\forall t \in T, L^j(C_i(t))B(t) = 0$ et $L^{r_i-1}(C_i(t))B(t) \neq 0$.

C'est-à-dire que T est un intervalle de temps pendant lequel les vecteurs $L^j(C_i(t))B(t)$ sont identiquement nuls et les vecteurs $D_i(t)$ ou $L^{r_i-1}(C_i(t))B(t)$ ne le sont pas. Si l'un de ces vecteurs était nul pour une valeur particulière du temps il conviendrait de restreindre l'intervalle. On peut ainsi construire la matrice de découplage $\Delta(t)$ de taille $(m \times m)$ dont la i -ième ligne $\Delta_i(t)$ est donnée par :

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} D_i(t) & \text{si } r_i = 0, \\ L^{r_i-1}(C_i(t))B(t) & \text{si } r_i \neq 0. \end{cases}$$

Comme dans le cas stationnaire, le m -uplet $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ est le degré relatif du système et l'on obtient, en notant $Y(t)$ le vecteur dont la i -ième composante est $y^{(r_i)}(t)$, et $\Phi(t)$ la matrice définie par :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} L^{r_1}(C_1(t)) \\ L^{r_2}(C_2(t)) \\ \vdots \\ L^{r_m}(C_m(t)) \end{bmatrix},$$

l'écriture :

$$Y(t) = \Phi(t)x(t) + \Delta(t)u(t).$$

La condition d'inversibilité est celle qui permet d'obtenir le bouclage statique découplant car lorsque $\Delta(t)$ est inversible sur T , le bouclage statique :

$$u(t) = \Delta(t)^{-1}(v(t) - \Phi(t)x(t)), \quad (32)$$

conduit aux relations découplées :

$$\text{pour tout } i \text{ dans } \{1, \dots, m\}, \quad y_i^{(r_i)}(t) = v_i(t).$$

On s'aperçoit ici que l'on a obtenu un découplage sous la forme d'un système linéaire à coefficients constants dont on peut placer les $\rho = \sum_{i=1}^m r_i$ dynamiques par m bouclages stabilisants.

Il convient toutefois de vérifier la stabilité du système complet, mais cela n'est pas aussi simple que dans le cas des systèmes à coefficients constants puisque la condition de valeurs propres à partie réelle négative n'a plus trop de sens ici ou n'est plus suffisante. En effet, l'application du bouclage (32) sur (31) donne :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(t) - B(t)\Delta(t)^{-1}\Phi(t))x(t) + B(t)\Delta(t)^{-1}v(t), \\ y(t) = (C(t) - D(t)\Delta(t)^{-1}\Phi(t))x(t) + D(t)\Delta(t)^{-1}v(t), \end{cases} \quad (33)$$

et lorsque :

$$\rho < n,$$

il existe une partie non observable de dimension $n - \rho$ à cette équation d'état dont il convient de s'assurer de la stabilité. Lorsque, $n = \rho$, il n'y a bien sûr aucun problème puisque toutes les composantes de l'état sont commandables et observables. La partie non observable correspond en fait au système des zéros du système initial, c'est-à-dire au système qui définit les commandes non transmises par le système.

10.2 Découplage par extension dynamique

Nous avons vu que le découplage par retour d'état statique n'était pas possible lorsque, soit la matrice Δ n'était pas inversible, soit la dynamique des zéros était instable. Alors que la deuxième situation est structurelle et ne peut être résolue que par un changement de sortie, dont une solution élégante sera donnée par la platitude, la première situation va être résolue par le principe d'extension dynamique. La méthode précédente pourra ensuite être utilisée et conduira à un bouclage dynamique qui, finalement, combinera :

- une extension dynamique par ajout d'intégrateurs sur certains canaux d'entrée ;
- un bouclage statique découplant le système augmenté obtenu.

Le bouclage découplant ainsi réalisé conservant les inconvénients que l'on a décrit dans la section précédent, il conviendra de s'assurer de la stabilité de la partie non observable.

Comme dans le cas général, la question que l'on doit se poser concerne le nombre et le lieu où l'on doit placer les intégrateurs où et combien ajouter d'intégrateurs ? L'algorithme de structure de Silverman [21], appelé également algorithme d'extension dynamique, que nous allons ici adapter au cas des systèmes non stationnaires va permettre d'y répondre.

Cet algorithme se déroule en des étapes itérées qui consiste à construire une succession de systèmes augmentés. Ce qui est fondamental dans cet algorithme est que d'une part, c'est un algorithme de type fini, c'est-à-dire que la conclusion est apportée au bout d'un nombre fini d'itérations. Et que d'autre part, si la conclusion est négative, il est assuré qu'aucun autre algorithme ne permettra un découplage avec une dynamique des zéros asymptotiquement stable. Seul un changement de sortie conduirait à une autre conclusion. Nous verrons, dans la section suivante la réponse à apporter dans ce cas.

Dans ce qui suit, nous noterons $\Sigma_{(i)}$ le système obtenu à l'étape i , sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_{(i)}(t) = A_{(i)}X_{(i)}(t) + B_{(i)}U_{(i)}(t), \\ Y_{(i)}(t) = \Phi_{(i)}X_{(i)}(t) + \Delta_{(i)}U_{(i)}(t), \end{cases} \quad (34)$$

et nous omettrons, de façon à alléger les écritures, l'argument t dans de nombreuses matrices.

10.2.1 Initialisation

L'initialisation de l'algorithme consiste à considérer le système composé de :

- la relation entre l'état et la commande :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t);$$

- la relation obtenue par dérivations pour faire apparaître la matrice de découplage :

$$Y(t) = \Phi(t)x(t) + \Delta(t)u(t),$$

soit le système $\Sigma_{(0)}$:

$$\begin{aligned} X_{(0)}(t) &= x(t), U_{(0)}(t) = u(t), Y_{(0)}(t) = Y(t), \\ A_{(0)} &= A, B_{(0)} = B, \Phi_{(0)} = \Phi, \Delta_{(0)} = \Delta. \end{aligned}$$

10.2.2 Etape d'extension

Pour $i \geq 0$, le passage d'un système, $\Sigma_{(i)}$, au suivant, $\Sigma_{(i+1)}$, est réalisé par la succession des étapes suivantes. A partir du système obtenu à l'étape (i) , soit :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(i)}(t) &= A_{(i)}X_{(i)}(t) + B_{(i)}U_{(i)}(t), \\ Y_{(i)}(t) &= \Phi_{(i)}X_{(i)}(t) + \Delta_{(i)}U_{(i)}(t), \end{aligned}$$

sur lequel on réalise un test préliminaire sur le rang de $\Delta_{(i)}$:

- si rang $\Delta_{(i)} = m$, alors l'algorithme est terminé, le système est découplable par le retour d'état :

$$U_{(i)}(t) = \Delta_{(i)}^{-1}(v(t) - \Phi_{(i)}X_{(i)}(t));$$

- si rang $\Delta_{(i)} = l < m$, alors on construit le système augmenté :

$$(\Sigma_{(i+1)}) \quad \begin{cases} \dot{X}_{(i+1)}(t) = A_{(i+1)}X_{(i+1)}(t) + B_{(i+1)}U_{(i+1)}(t), \\ Y_{(i+1)}(t) = \Phi_{(i+1)}X_{(i+1)}(t) + \Delta_{(i+1)}U_{(i+1)}(t), \end{cases}$$

par la procédure dont on décrit les étapes dans ce qui suit.

Procédure d'extension dynamique :

1. On cherche une matrice $M_{(i)}$ de taille $(m \times m)$ telle que :

$$\Delta_{(i)}M_{(i)} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ F_{(i)} & 0 \end{pmatrix},$$

où $F_{(i)}$ est une matrice de taille $((m-l) \times l)$. Une procédure permettant de déterminer $M_{(i)}$ consiste à partir d'une factorisation de rang maximal de $\Delta_{(i)}$, [?], sous la forme :

$$\Delta_{(i)} = \begin{bmatrix} I_l \\ F_{(i)} \end{bmatrix} G_{(i)},$$

où $G_{(i)}$ est une matrice de rang plein en lignes, et de la compléter par une matrice $H_{(i)}$ de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} G_{(i)} \\ H_{(i)} \end{bmatrix},$$

soit inversible. On peut alors écrire :

$$\Delta_{(i)} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ F_{(i)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{(i)} \\ H_{(i)} \end{bmatrix},$$

soit :

$$M_{(i)} = \begin{bmatrix} G_{(i)} \\ H_{(i)} \end{bmatrix}^{-1}.$$

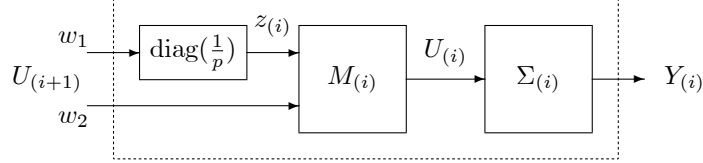
2. On partitionne sous la forme $M_{(i)} = \begin{pmatrix} M_{1(i)} & M_{2(i)} \end{pmatrix}$ où $M_{1(i)}$ est une matrice $(m \times l)$ ce qui permet d'introduire l'extension sous la forme de l intégrateurs :

$$\begin{aligned} U_{(i)} &= M_{1(i)}z_{(i)} + M_{2(i)}w_{2(i)}, \\ \dot{z}_{(i)} &= w_{1(i)}, \end{aligned}$$

où w_1 et w_2 vont constituer la nouvelle commande :

$$U_{(i+1)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

3. On applique $U_{(i)}$ à $\Sigma_{(i)}$ ce qui donne le système décrit par :



et on obtient ainsi le système intermédiaire :

$$\begin{cases} \dot{X}_{(i)}(t) = A_{(i)}X_{(i)}(t) + B_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)}(t) + B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)}(t), \\ \dot{z}_{(i)}(t) = w_{1(i)}(t), \\ Y_{(i)}(t) = \Phi_{(i)}X_{(i)}(t) + \Delta_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)}(t), \end{cases}$$

car $\Delta_{(i)}M_{2(i)} = 0$, et où la commande n'apparaît plus dans la sortie $Y_{(i)}(t)$.

4. Notons $Y_{j(i)}(t)$ et $\Phi_{j(i)}$ les j -ièmes composantes et lignes du vecteur $Y_{(i)}(t)$ et de la matrice $\Phi_{(i)}$. On peut alors définir les degrés différentiels $r_{j(i)}$ des variables $Y_{j(i)}(t)$ relativement aux commandes $w_{1(i)}(t)$ et $w_{2(i)}(t)$. Comme on peut remarquer que :

$$\Delta_{(i)}M_{1(i)} = \begin{bmatrix} I_l \\ F_{(i)} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

on sait d'ores et déjà que pour j de 1 à l , on a $r_{j(i)} = 1$.

Or, pour j de 1 à l :

$$Y_{j(i)}(t) = \Phi_{j(i)}X_{(i)}(t) + z_{j(i)}(t),$$

donc :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{j(i)}(t) &= (\Phi_{j(i)}A_{(i)} + \dot{\Phi}_{j(i)})X_{(i)}(t) + \Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)}(t) \\ &\quad + w_{j,1(i)}(t) + \Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)}(t), \end{aligned}$$

où $w_{j,1(i)}(t)$ est la j -ième composante de $w_{1(i)}(t)$.

Pour $j > l$, en notant $F_{j(i)}$ la j -ième ligne de $F_{(i)}$, on a :

$$Y_{j(i)}(t) = \Phi_{j(i)}X_{(i)}(t) + F_{j(i)}z_{(i)}(t),$$

donc :

– si $F_{j(i)} \neq 0$, $r_{j(i)} = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{j(i)}(t) &= (\Phi_{j(i)}A_{(i)} + \dot{\Phi}_{j(i)})X_{(i)}(t) + (\Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{1(i)} + \dot{F}_{j(i)})z_{(i)}(t) \\ &\quad + F_{j(i)}w_{1(i)}(t) + \Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)}(t); \end{aligned}$$

– si $F_{j(i)} = 0$, alors $r_{j(i)}$ est défini par le nombre de dérivations de $Y_{j(i)}(t)$ nécessaires pour faire apparaître la commande $w_{2(i)}(t)$, soit :

$$\begin{aligned} Y_{j(i)}^{(r_{j(i)})}(t) &= L_{(i)}^{r_{j(i)}}(\Phi_{j(i)})X_{(i)}(t) + L_{(i)}^{r_{j(i)}-1}(\Phi_{j(i)})B_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)}(t) \\ &\quad + L_{(i)}^{r_{j(i)}-1}(\Phi_{j(i)})B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)}(t), \end{aligned}$$

où $L_{(i)}^k(\Phi_{j(i)})$ est l'opérateur différentiel $L(\Phi_{j(i)}) = \Phi_{j(i)}A_{(i)} + \dot{\Phi}_{j(i)}$ itéré k fois.

5. Le système augmenté $\Sigma_{(i+1)}$ est obtenu en posant :

– comme nouvelles variables :

$$X_{(i+1)}(t) = \begin{pmatrix} X_{(i)}(t) \\ z_{(i)}(t) \end{pmatrix}, \quad U_{(i+1)}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix},$$

$$Y_{(i+1)}(t) = \begin{bmatrix} Y_{1(i)}^{(r_{1(i)})}(t) \\ Y_{2(i)}^{(r_{2(i)})}(t) \\ \vdots \\ Y_{m(i)}^{(r_{m(i)})}(t) \end{bmatrix},$$

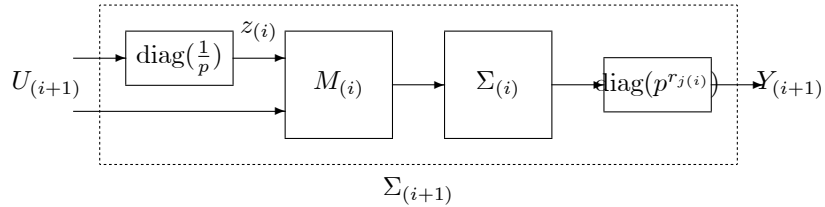
– comme nouvelle équation d'état (34) définie par :

$$A_{(i+1)} = \begin{bmatrix} A_{(i)} & B_{(i)}M_{1(i)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{(i+1)} = \begin{bmatrix} 0 & B_{(i)}M_{2(i)} \\ I_l & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{(i+1)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ L_{(i)}^{r_{j(i)}}(\Phi_{j(i)}) & L_{(i)}^{r_{j(i)}-1}(\Phi_{j(i)})B_{(i)}M_{1(i)} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{(i+1)} = \begin{bmatrix} & \Phi_{1(i)}B_{(i)}M_{2(i)} \\ I_l & \Phi_{2(i)}B_{(i)}M_{2(i)} \\ & \vdots \\ & \Phi_{l(i)}B_{(i)}M_{2(i)} \\ & \vdots \\ 0 & L_{(i)}^{r_{j(i)}-1}(\Phi_{j(i)})B_{(i)}M_{2(i)} \\ & \vdots \end{bmatrix},$$

ce qui correspond au schéma :



On peut alors recommencer en testant le rang de $\Delta_{(i+1)}$ pour construire un système augmenté permettant le découplage. Comme on l'a déjà dit l'algorithme s'arrête lorsque la matrice de découplage à l'étape i est inversible, mais lorsque cette matrice ne voit pas augmenter son rang il existe un nombre d'itérations maximal qui permet de conclure à l'impossibilité du découplage. Le résultat suivant, qui a également été montré dans le cas des systèmes non linéaires, indique la finitude de l'algorithme d'extension dynamique.

Proposition : Pour le système (34), dans le cas où $\text{rang } \Delta_{(i)} = l < m$, les deux événements suivants sont mutuellement exclusifs :

- après au plus $n - (r_1 + \dots + r_l + \min_{j=l+1}^m r_j)$ itérations de l'étape d'extension dynamique, le nouveau système augmenté est tel que le rang de sa matrice de découplage est supérieur à l ;
- après un nombre quelconque d'itérations, le système obtenu a constamment une matrice de découplage de rang q .

$$B_C = T_C B = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times & \begin{matrix} \uparrow \\ \mu_1 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \mu_2 \\ \downarrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \mu_m \\ \downarrow \end{matrix} \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad C_C = C T_C^{-1},$$

où les μ_j sont les m indices de commandabilité. Rappelons, d'une part, que ces indices permettent de construire les indices cumulés, pour $i = 1, \dots, m$, $\sigma_i = \sum_{j=1}^i \mu_j$, et que les lignes significatives de B_C peuvent être regroupées pour former la matrice triangulaire supérieure H_C .

A partir des indices σ_i , formons le vecteur :

$$z = \begin{bmatrix} x_{C,1} \\ x_{C,\sigma_1+1} \\ x_{C,\sigma_2+1} \\ \vdots \\ x_{C,\sigma_{m-1}+1} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

où $x_{C,i}$ représente la i -ième composante de l'état x_C . Ce vecteur, appelé parfois sortie de Brunovski du système ou état partiel, en est une sortie plate. En effet, d'après la structure de A_C , u s'écrit :

$$u = H_C^{-1}(z^{(\mu)} + \sum_{j=0}^{\mu-1} M_j z^{(j)}), \quad (37)$$

où $\mu = \max_{j=1, \dots, m} \mu_j$, et les matrices M_j sont des matrices constantes. D'autre part :

$$x = T_C^{-1} x_C = \sum_{j=0}^{\mu-1} T_j z^{(j)}, \quad (38)$$

où les matrices T_j sont des matrices constantes. Ces deux relations indiquent bien que z est une sortie plate du système linéaire (??) qui permet de paramétrer toutes les variables du système.

10.3.2 Découplage par retour statique

Si l'on écrit plus précisément les relations de la partie précédente, on s'aperçoit que dans la relation qui permet de paramétrer u à l'aide de z , toutes les composantes de $z^{(\mu)}$ ne sont pas nécessaires. Soit le vecteur :

$$Z = \begin{bmatrix} x_{C,1}^{(\mu_1)} \\ x_{C,\sigma_1+1}^{(\mu_2)} \\ x_{C,\sigma_2+1}^{(\mu_3)} \\ \vdots \\ x_{C,\sigma_{m-1}+1}^{(\mu_m)} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

alors la structure de (A_C, B_C) permet d'écrire :

$$Z = M_C x_C + H_C u, \quad (40)$$

où M_C est la matrice formée de toutes les lignes significatives de A_C . Comme $x_C = T_C x$, et que $z = T x_C$ où :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \leftarrow \mu_1 \rightarrow & \leftarrow \mu_2 \rightarrow & & \leftarrow \mu_m \rightarrow \end{bmatrix}, \quad (41)$$

H_C , qui est toujours inversible, apparaît donc comme la matrice de découplage du système linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= T T_C x, \end{aligned} \quad (42)$$

c'est-à-dire le système linéaire dont les sorties sont les sorties plates de Brunovski, admet (μ_1, \dots, μ_m) comme degré relatif. Ce système est donc découplable par le retour statique d'état :

$$u = H_C^{-1}(v - M_C T_C x), \quad (43)$$

où v est une nouvelle commande sur laquelle on peut réaliser un retour supplémentaire stabilisant canal par canal.

Comme de plus :

$$\sum_{j=1}^m \mu_j = n, \quad (44)$$

la dimension de l'état non observable est nulle et l'on n'a pas à se soucier de la stabilité de la partie interne du système découplé ainsi obtenu, que ce soit dans un cas stationnaire ou non.

Ainsi, l'avantage de considérer la sortie plate d'un système est double, relativement au découplage bien sûr, il n'y a pas besoin d'extension dynamique et la dynamique des zéros n'existe pas. A toute médaille son revers, la sortie plate n'est peut-être pas celle désirée, mais nous avons vu que, dans ce cas, on pouvait par découpage de la trajectoire désirée sur la sortie initiale, et en imposant des contraintes aux points de passage, limiter l'écart entre la trajectoire en sortie obtenue et la trajectoire désirée. Enfin, comme tout vecteur :

$$\eta = Pz, \quad (45)$$

où P est une matrice inversible, peut être considéré comme sortie plate, et le même raisonnement peut être appliqué.

11 Annexe

Pour obtenir la forme de $[F_n(D)]^{-1}$, désignons la matrice définie en (??) par $F_n(D)$. Alors, avec $F_1(D) = 1$, on peut remarquer que pour $n > 1$:

$$F_n(D) = \begin{bmatrix} F_{n-1}(D) & \Gamma_{n-1}(D) \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{n-1} \\ (n-1)D^{n-2} \\ \vdots \\ (n-1)D \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cela donne [15] :

$$F_n^{-1}(D) = \begin{bmatrix} F_{n-1}^{-1}(D) & -F_{n-1}^{-1}(D)\Gamma_{n-1}(D) \\ 0 & \dots & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Supposons, par hypothèse de récurrence, que :

$$F_{n-1}^{-1}(D) = \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} D^{j-i} \text{ pour } i \leq j \\ 0 \text{ pour } i > j \end{array} \right\} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & -D & D^2 & \dots & (-1)^{n-2} D^{n-3} & (-1)^{n-1} D^{n-2} \\ 0 & 1 & -2D & \dots & \dots & (-1)^{n-2} (n-2) D^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & -3D & \dots & (-1)^{n-3} \binom{n-2}{2} D^{n-4} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -(n-2)D \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

D'une part cette hypothèse est vraie pour $n = 2$, et d'autre part, si on calcule la i -ième composante de $F_{n-1}^{-1}(D)\Gamma_{n-1}(D)$, celle-ci s'écrit :

$$\sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} D^{j-1} \binom{n-1}{j-1} D^{n-j}.$$

Quelques manipulations permettent de l'écrire sous la forme :

$$\binom{n-1}{i-1} D^{n-i} \left(\sum_{k=0}^{n-i-1} (-1)^k \binom{n-i}{k} \right).$$

Comme le terme entre parenthèses vaut $(-1)^{n-i+1}$, le calcul de $F_{n-1}^{-1}(D)\Gamma_{n-1}(D)$ confirme bien l'hypothèse de récurrence et conduit à la forme de $F_n^{-1}(D)$:

$$F_n^{-1}(D) = \left[\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -D & D^2 & \dots & (-1)^{n-2} D^{n-3} & (-1)^{n-1} D^{n-2} & (-1)^n D^{n-1} \\ 0 & 1 & -2D & \dots & \dots & (-1)^{n-2} (n-2) D^{n-3} & (-1)^{n-1} (n-1) D^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3D & \dots & (-1)^{n-3} \binom{n-2}{2} D^{n-4} & (-1)^{n-2} \binom{n-1}{2} D^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -(n-2)D & \binom{n-1}{2} D^2 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & -(n-1)D \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

Références

- [1] Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I., *Commande et optimisation des processus*, Technip, 1990.
- [2] Bourlès, H., Fliess, M., "Poles and zeros of linear systems : an invariant approach", IFAC Conf. on Systems, Structure and Control, pp. 432–437, Nantes, 1995.
- [3] Bourlès, H., Marinescu, B., "Structure at infinity of linear time-varying systems", *C. R. Acad. Sci.*, t. 323, série 1, pp. 685–691, 1996.
- [4] Coron, J.M., Quelques résultats sur la commandabilité, <http://math.polytechnique.fr/xups/vol99.html>, 1999.
- [5] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Rouchon, "Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples", *Int. J. Control*, vol. 61, n. 6, pp. 1327–1361, 1995.

- [6] Gantmacher, F.R., *Théorie des matrices*, Dunod, 1966.
- [7] Isidori, A., *Non linear control systems*, Springer Verlag, 1985.
- [8] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice Hall, 1980.
- [9] Kalman, R.E., “A new approach to linear filtering and prediction problems”, *Trans. ASME ser. D, J. Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [10] Kalman, R.E., Bucy, R.S., “New results in linear filtering and prediction problems”, *Trans. ASME ser. D, J. Basic Engineering*, vol. 83, pp. 95–108, 1961.
- [11] Kamen, E.W., “Fundamentals of linear time-varying systems”, chap. 25, *The control handbook*, Levine W.S. (Ed.), pp. 451–468, CRC Press, 1996.
- [12] Lewis, F.L., Syrmos, V.L., *Optimal control*, John Wiley & Sons, 1995.
- [13] Liu, G.P., Patton, R.J., *Eigenstructure assignment*, John Wiley & Sons, 1998.
- [14] Richards, J.A., *Analysis of periodically time-varying systems*, Springer-Verlag, 1983.
- [15] Rotella, F., Borne, P., *Théorie et pratique du calcul matriciel*, Technip, 1995.
- [16] Rotella, F., “Systèmes linéaires non stationnaires”, *Techniques de l’Ingénieur*, tome *Informatique Industrielle*, S-7185, Dunod, 2003.
- [17] Rouche, N., Mawhin, J., *Équations différentielles ordinaires, T. 1 : Théorie générale*, Masson, 1973.
- [18] Seal, C.E., Stubberud, A.R., Canonical forms for multiple-input time-variable systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-14, pp. 704–707, 1969.
- [19] Shafai, B., Carroll, R.L., Minimal-order observer designs for linear time-varying multivariable systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-31, pp. 757–761, 1986.
- [20] Silverman, L.M., “Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form”, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-11, pp. 303–306, 1966.
- [21] Silverman, L.M., Payne, H.J., “Input-output structure of linear systems with applications to the decoupling problem”, *SIAM J. of Control*, n. 9, pp. 188–233, 1971.
- [22] Silverman, L.M., Meadows, H.E., “Controllability and observability in time-variable linear systems”, *SIAM J. Control and Optimization*, n^o5, pp. 64–73, 1967.