

# Modélisation des machines électriques par le calcul analytique des champs

## Figures, Dessins et Equations

Chapitre 0 - 1 - 2 - 3 - 4

Chapitre 0 - 1 - 2 - 3 - 4

**Jean-Paul CARON**

I.N.P.L. – E.N.S.E.M. – G.R.E.E.N.

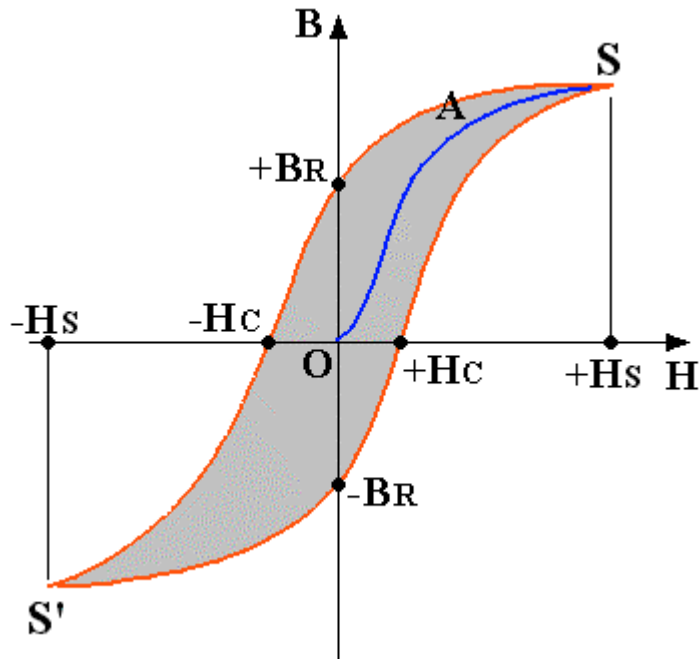
2 Av. de la foret de Haye

54500 Vandoeuvre-les-Nancy

E-Mail : [Jean-Paul.Caron@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:Jean-Paul.Caron@ensem.inpl-nancy.fr)

## 00 - Introduction :

Les convertisseurs électromécaniques transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique ou inversement.



## 0 - Remarques importantes :

Une machine électrique est essentiellement constituée de :

- CUIVRE : traversé par des courants qui créent le champ H et donc l'induction B
- FER : canalise les lignes d'induction,
- AIR : généralement l'entrefer d'une machine électrique est le plus petit possible. La mécanique et la thermique imposent un jeu entre le stator et le rotor.

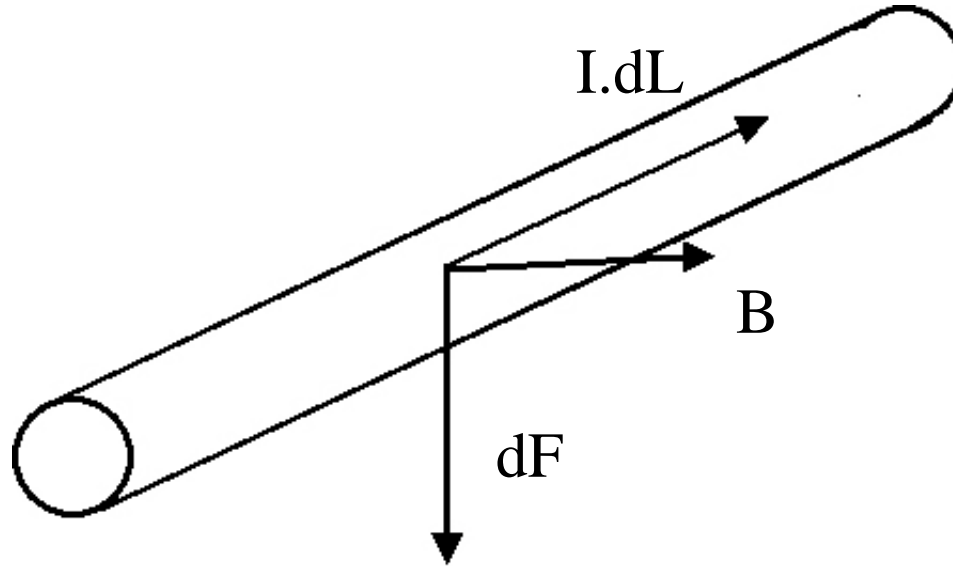
### Pertes dans ces matériaux :

cuivre : pertes par effet Joule  $P_j = R I^2$

fer : pertes par hystérésis (variation de H par rapport au temps), proportionnelles au carré de la tension. (Pour les matériaux utilisés dans les machines, les pertes fer sont de l'ordre de 0,5 à 5 Watt par kilo (à 50 Hz, 1 Tesla)).

## 1 - Principe de base : Loi de Laplace :

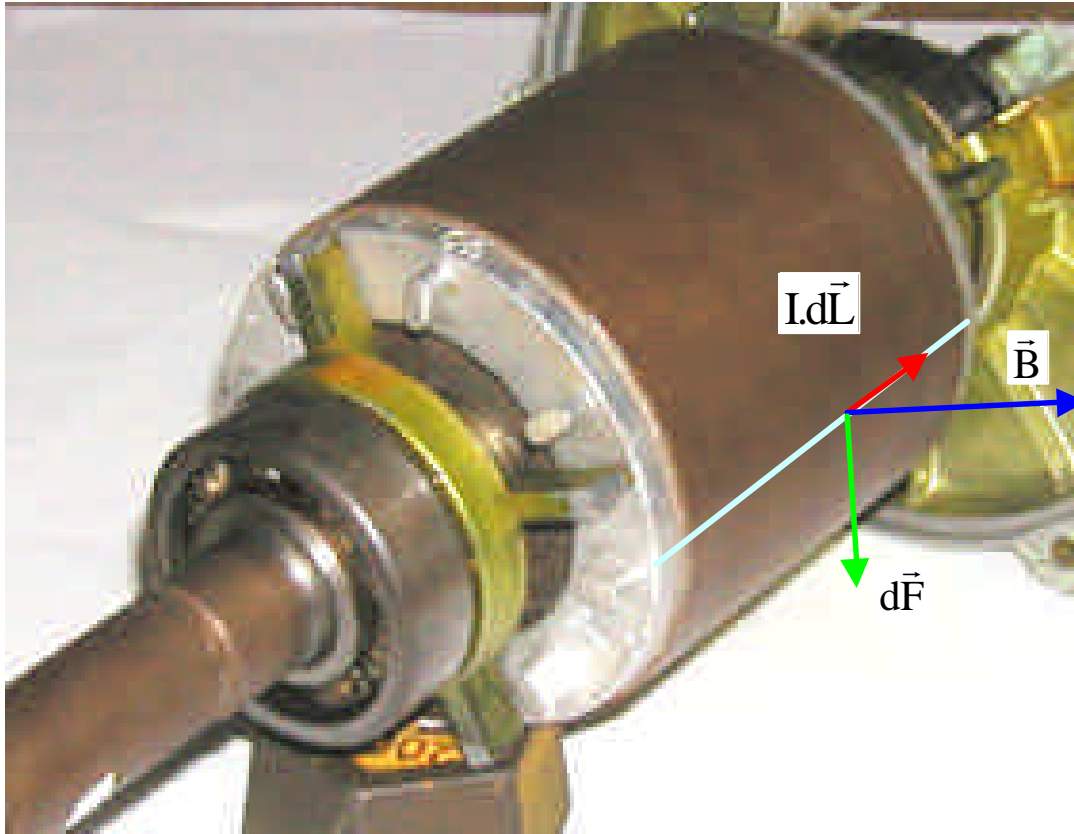
Un conducteur qui est parcouru par un courant  $I$  est soumis à la force  $F$  quand il est placé dans une induction  $B$ .



La force élémentaire s'exprime par la relation :

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{L} \wedge \vec{B} \Rightarrow dF = B \cdot I \cdot dL \cdot \sin(\alpha)$$

La disposition des conducteurs est telle que la valeur :  $\sin(\mathbf{dl}, \mathbf{B})$  soit maximale.

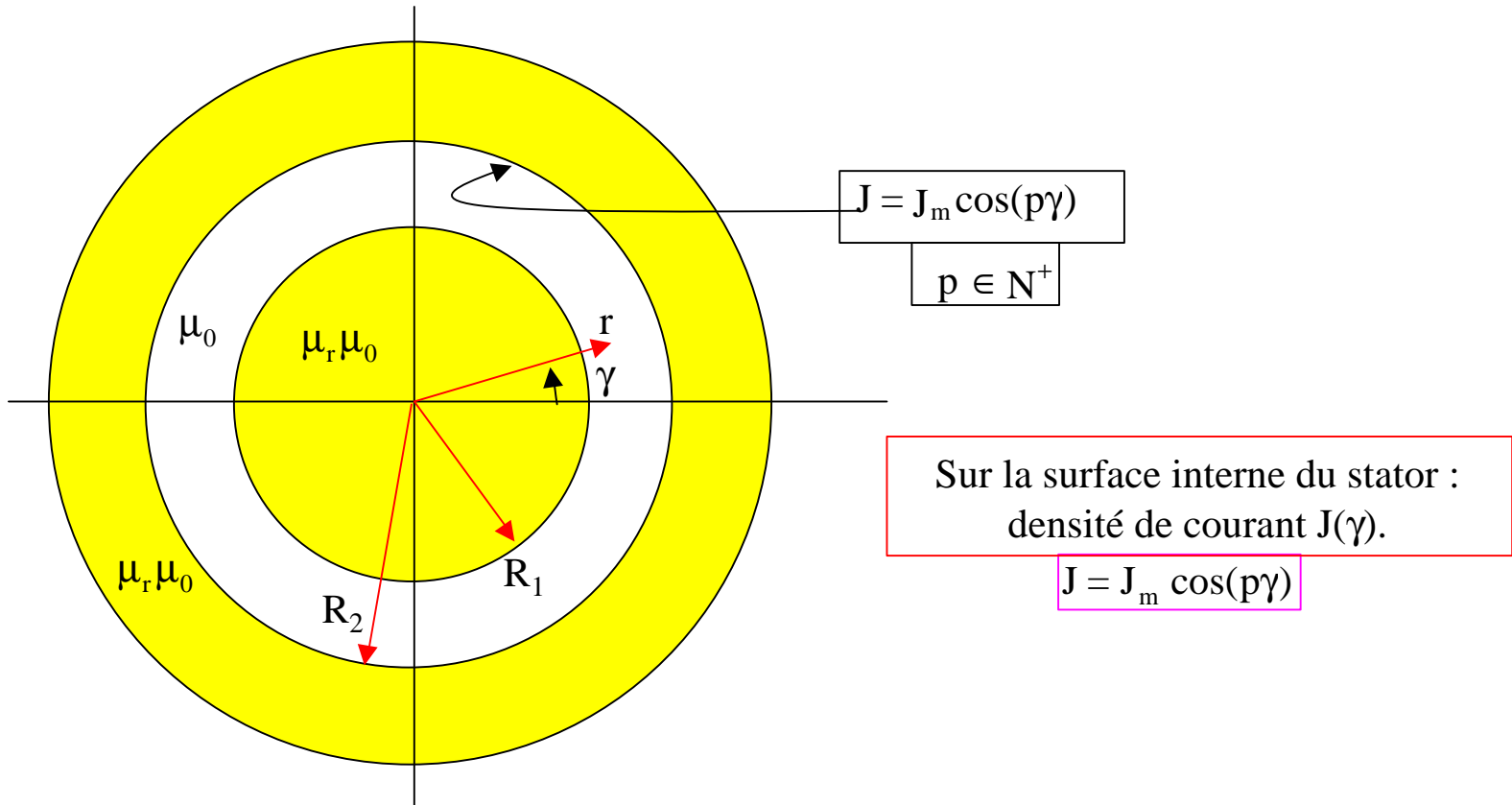


Disposition la plus classique :  
conducteurs axiaux  
champ radial

Dans un repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , cela se traduit par :

$$d\vec{F} : \begin{vmatrix} 0 \\ dF \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B} : \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } Id\vec{L} : \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ IdL \end{vmatrix}$$

## 2 – Induction magnétique créée par une nappe de courant



Stator et rotor en tôles magnétique (perméabilité magnétique relative très grande  $\mu_r \gg 1$  ).

## 2 – 1 : Expression du Potentiel vecteur dans l'entrefer :

$$\vec{R}ot(\vec{H}) = \vec{j} \quad \text{Expression locale du Théorème d'AMPERE}$$

$$Div(\vec{B}) = 0 \quad \text{Aspect conservatif de l'induction}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{J} \text{ a comme composantes : } \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ J(\gamma) \end{array}$$

$$Div(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \vec{R}ot(\vec{A}) \\ Div(\vec{A}) = 0 \end{array} \right]$$

$$\vec{J} : \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ J(\gamma) \end{array} \Leftrightarrow \vec{A} : \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ A(r, \gamma) \end{array}$$

$$\vec{R}ot\left(\frac{1}{\mu} \vec{R}ot(\vec{A})\right) = \vec{j} \Leftrightarrow \vec{R}ot(\eta \vec{R}ot(\vec{A})) = \vec{j} \quad \left(\frac{1}{\mu}\right) = (\eta)$$

$$\vec{A} : \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ A(r, \gamma) \end{array} \Rightarrow \vec{R}ot(\vec{A}) : \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial \gamma} \\ -\frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \\ 0 \end{array} \Rightarrow \vec{R}ot(\eta \vec{R}ot(\vec{A})) : \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta r \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\eta}{r} \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial \gamma} \right) \right] \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\eta \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A(r, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\eta \Delta A(r, \gamma) \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}ot \left( \frac{1}{\mu} \vec{R}ot(\vec{A}) \right) = \vec{j} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\eta \Delta A(r, \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j(\gamma) \end{bmatrix}$$

**D'où nous avons à résoudre l'équation :**  $-\frac{1}{\mu} \Delta A(r, \gamma) = j(\gamma)$

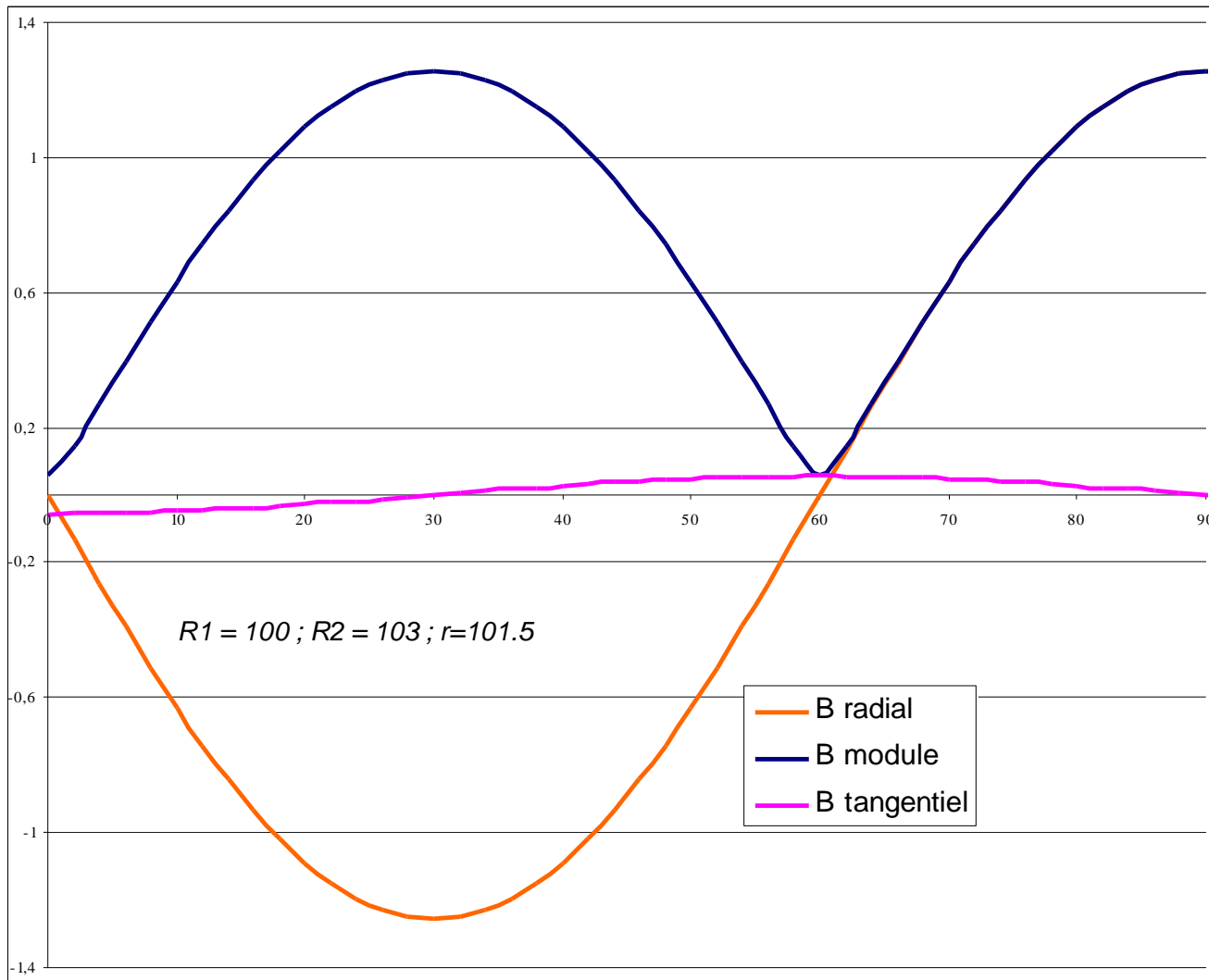
Potentiel vecteur dans l'entrefer :

$$A_J = [\cos(p\gamma)] \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left( \frac{r^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} r^{-p} \right)$$

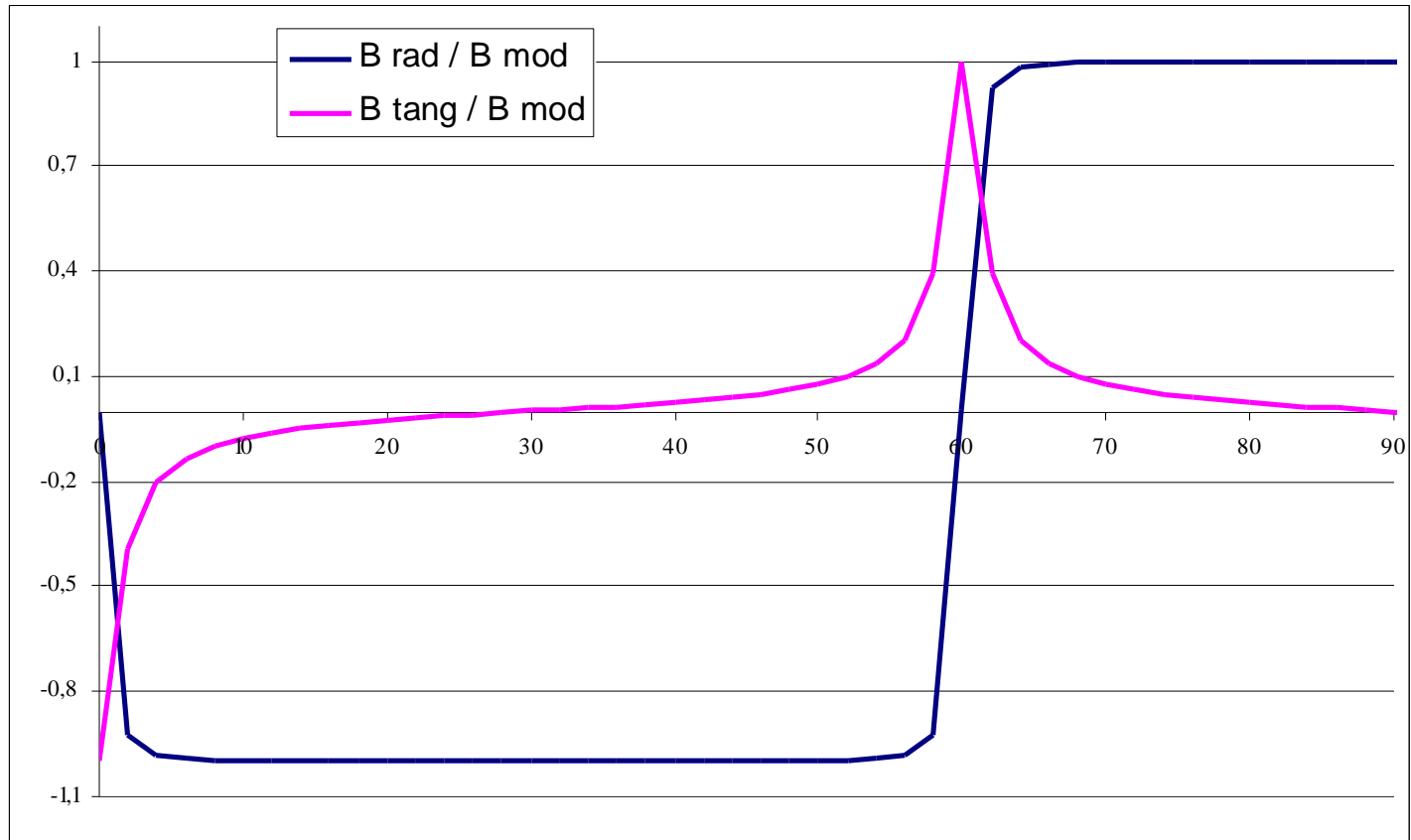
2 – 3 : Calcul des composantes de l'induction magnétique dans l'entrefer :

$$\vec{B} = \vec{Rot}(\vec{A}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \gamma} = B_r \\ -\frac{\partial A}{\partial r} = B_\gamma \\ 0 = B_z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B_{J,r} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} + \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \sin p\gamma \\ B_{J,\gamma} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} - \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \cos p\gamma \end{array}$$

$$B_{J,z} = 0$$



**Composante normale, composante tangentielle et module de l'induction  
fonctions de l'angle  $g$ .**



**Composantes radiale et tangentielle divisées par le module de l'induction fonctions de l'angle  $g$ .**

### 3 – Calcul de l'énergie magnétique stockée :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\tau$$

$$d\tau = r \, dr \, d\gamma \, dz$$

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2p(1-x^{2p})} J_m^2 R_2^2 (1+x^{2p})$$

### 4 – Couple exercé par une nappe de courant sur elle-même :

$$\Gamma = - \frac{\partial W}{\partial \text{déplacement virtuel}} = 0$$